На правах рукописи

**Федоров Андрей Юрьевич**

# ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК УПРУГИХ ТЕЛ

Специальность 01.02.04 — Механика деформируемого твёрдого тела

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Пермь 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (ИМСС УрО РАН)

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор технических наук, профессор,<br>академик РАН<br>**Матвеенко Валерий Павлович** |
| Официальные оппоненты: | доктор технических наук<br>**Зезин Юрий Павлович**<br>(Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М. В. Ломоносова, ведущий научный сотрудник лаборатории ползучести и длительной прочности) |
| | доктор физико-математических наук, профессор<br>**Копысов Сергей Петрович**<br>(Институт механики УрО РАН, заведующий лабораторией вычислительных и информационных технологий) |
| Ведущая организация: | Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук |

Защита состоится 21 июня 2016 г. в $14^{\underline{00}}$ часов на заседании диссертационного совета Д 004.012.01 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1; тел: (342) 2378388; факс: (342) 2378487; сайт: www.icmm.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук и на его сайте http://www.icmm.ru.

Автореферат разослан «___» апреля 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук, доцент Зуев Андрей Леонидович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В задачах теории упругости существуют сингулярные решения, связанные с появлением бесконечных значений напряжений в особых точках. К последним относятся точки границы тела, в которых имеет место нарушение её гладкости, смена типа краевых условий или контакт различных материалов. Проблема построения сингулярных решений в окрестности особых точек привлекла внимание многих исследователей. Для двумерных и трёхмерных задач линейной теории упругости рассмотрены различные варианты особых точек. Важные результаты по данной тематике были получены А. В. Андреевым, В. А. Бабешко, И. И. Воровичем, Е. В. Глушковым, Н. В. Глушковой, Р. В. Гольдштейном, И. Т. Денисюком, А. И. Каландия, В. А. Кондратьевым, А. М. Линьковым, В. Г. Мазья, В. П. Матвеенко, С. Е. Михайловым, В. И. Мусхелишвили, Л. В. Степановой, С. П. Тимошенко, К. С. Чобаняном, Г. И. Эскином, D. B. Bogy, A. Carpinteri, J. P. Dempsey, J. Dundurs, J. W. Eischen, F. Erdogan, E. E. Gdoutos, H. Koguchi, S. S. Pageau, M. Paggi, C. R. Picu, G. B. Sinclair, P. S. Theocaris, T. C. T. Ting, M. L. Williams. Достаточно полно результаты, достигнутые в этой области, представлены в зарубежных обзорных статьях. Следует отметить, что в этих обзорах отсутствуют сведения о многочисленных работах российских механиков, и поэтому они не могут претендовать на корректное отражение вклада конкретных авторов в рассматриваемую проблему. В некоторой степени компенсировать это помогают диссертационные работы С. Г. Минаковой и Т. О. Накаряковой, в которых содержатся подробные литературные обзоры монографий и статей, связанных с рассмотрением и изучением теоретических аспектов проблем построения сингулярных решений для различных задач теории упругости, а также особенностей численной реализации методов исследования напряжений в окрестностях особых точек.

Анализ литературы и указанных обзоров позволяет сделать заключение, что отсутствуют работы, в которых систематизированы достигнутые результаты. Имеются определённые проблемы, связанные с анализом сингулярности напряжений в анизотропных телах при прямолинейной анизотропии, в трёхмерных телах. Имеются только единичные результаты, вне рамок классической теории упругости, в частности, полученные при использовании моделей несимметричной теории упругости. С развитием технологий получения и практических приложений функционально-градиентных материалов (ФГМ) возник интерес к исследованиям сингулярных решений в окрестности особых точек упругих тел с функционально-градиентными свойствами. Работы в этой области единичны и не имеют общего характера.

Анализ сингулярных решений и инженерный опыт позволяют сделать вывод, что окрестности особых точек, как правило, являются зонами сильной концентрации напряжений. В связи с этим сингулярные решения имеют большое значение для практических приложений. Однако в ряде прикладных разделов учёту существования сингулярных решений не уделяется должного внимания. Например, такая ситуация имеет место в методиках определения прочности клеевых соединений. Следует отметить, что наличие или отсутствие сингулярного решения и поведение напряжений определяются геометрией тела и значениями упругих постоянных в окрестности особой точки. Исходя из этого, естественной и актуальной становится задача поиска геометрии и свойств материала, которые обеспечивают в окрестности особых точек оптимальный вариант напряжённого состояния. В данном направлении имеется достаточно много экспериментальных и численных работ, в которых для частных задач анализируются и сравниваются различные варианты геометрий в окрестности особых точек. Постановка общей задачи оптимизации геометрии и свойств материала в окрестности особых точек, решение различных задач оптимизации с целью обобщения численных результатов являются актуальными как с математической точки зрения, так и для различных приложений.

Исследования, проведённые в данной работе, относятся к разделу 23 «Механика деформирования и разрушения материалов, сред, изделий, конструкций, сооружений и триботехнических систем при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред» Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы. Представляемая работа выполнена в рамках государственного задания Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук. Часть результатов была получена при выполнении проектов РФФИ №№ 09-08-99127, 11-01-96017-р_урал_а, 12-01-31007 мол_а, 16-31-00245 мол_а.

**Целью диссертационной работы** является получение новых решений задач о напряжённо-деформированном состоянии в окрестности особых точек упругих тел, в том числе с функционально-градиентными и анизотропными свойствами, с учётом моментного поведения материала; постановка и решение задач оптимизации геометрии и свойств материала в окрестности особых точек упругих тел.

**Научная новизна.**

1. Получены аналитические и численные решения, позволяющие оценить поведение напряжений в окрестности особых точек упругих тел с функционально-градиентными свойствами.
2. Разработан численный алгоритм, позволяющий получить порядок степенной зависимости напряжений в окрестности особых точек изотропных и анизотропных упругих тел для двумерных и трёхмерных задач классической и несимметричной теорий упругости.
3. Поставлена задача оптимизации геометрии и свойств материала в окрестности особых точек упругих тел и разработан алгоритм её численной реализации.
4. Установлены общие свойства для геометрии и упругих характеристик материала, при которых реализуются оптимальные варианты напряжённого состояния в окрестности особых точек.

**Практическая значимость** определяется использованием алгоритмов, разработанных для решения задачи оптимизации геометрии и свойств материала в окрестности особых точек; применением установленных общих свойств оптимальных решений для снижения концентрации напряжений; рекомендациями по совершенствованию методики определения прочности клеевых соединений.

**Методология и методы исследования.** Построение аналитическими методами собственных решений задач теории упругости для клиновидных областей и анализ на их основе поведения напряжений в окрестности особых точек. Разработка и использование алгоритмов метода конечных элементов для решения задач теории упругости при наличии особых точек. Решение оптимизационных задач методами нелинейного математического программирования.

**Положения, выносимые на защиту.**

1. Численный алгоритм, позволяющий получать результаты о поведении напряжений в окрестности особых точек упругих двумерных и трёхмерных тел, выполненных из изотропных и анизотропных материалов, при использовании моделей классической и несимметричной теорий упругости.

2. Аналитические и численные результаты решения задачи о поведении напряжений в окрестности особых точек упругих тел, выполненных из функционально-градиентных материалов.

3. Постановка и алгоритм численной реализации задачи оптимизации геометрии и свойств материала в окрестности особых точек упругих тел.

4. Результаты решения задач оптимизации геометрии и параметров материала в окрестности особых точек упругих тел, в том числе с функционально-градиентными свойствами.

5. Демонстрация эффективности использования установленного свойства оптимальных решений в окрестности особых точек для снижения концентрации напряжений на поверхности соединения различных материалов, в том числе в клеевых и адгезионных соединениях.

**Достоверность полученных результатов** подтверждена численными экспериментами по оценке сходимости конечно-элементного алгоритма, сопоставлением с существующими аналитическими решениями, имеющимися исследованиями других авторов и сравнением отдельных результатов с экспериментальными данными.

**Апробация работы.** Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались на Всероссийских конференциях молодых учёных «Неравновесные процессы в сплошных средах» (Пермь, 2009, 2010, 2011, 2012), Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных «Современные проблемы математики и её прикладные аспекты» (Пермь, 2010), VI и VII Российских научно-технических конференциях «Механика микронеоднородных материалов и разрушение» (Екатеринбург, 2010, 2012), VII Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2010), II Международной конференции по инженерно-технической оптимизации «ENGOPT2010» (Португалия, Лиссабон, 2010), на XVII, XVIII и XIX Всероссийских Зимних школах по механике сплошных сред (Пермь, 2011, 2013, 2015), V Всероссийской научно-технической конференции «Ресурс и диагностика материалов и конструкций» (Екатеринбург, 2011), 39-й и 40-й Международных летних школах-конференциях «Актуальные проблемы механики» (Россия, Санкт-Петербург, 2011, 2012), Научно-практической конференции молодых учёных «Актуальные проблемы математики, механики, информатики» (Пермь, 2012), I Всероссийской научно-технической интернет-конференции студентов и молодых учёных «Прикладная математика, механика и процессы управления» (Пермь, 2013), V Европейской конференции по вычислительной механике «ECCM V» (Испания, Барселона, 2014), II Греко-российском симпозиуме по механике твёрдого тела и разрушению (Греция, Ксанти, 2015), XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015).

**Личный вклад автора.** Постановки задач (совместно с научным руководителем), численные и аналитические методы исследования поведения напряжений в окрестности особых точек упругих тел из ФГМ, идея алгоритма для получения порядка степенной зависимости напряжений в окрестности особых точек, разработка и реализация программ на ЭВМ, проведение вычислений, анализ результатов.

**Публикации.** По теме диссертации опубликована 31 работа, включая 4 статьи в рецензируемых журналах из Перечня ВАК [1–4], 9 статей в прочих журналах, сборниках научных трудов и материалов конференций, 18 тезисов конференций. Публикации [2–4] входят в базы цитирования Web of Science и Scopus.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы (194 наименования). В работе приводятся 82 рисунка и 18 таблиц. Общий объём диссертации составляет 172 страницы.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Введение** посвящено обзору литературы по тематике диссертационной работы.

В **первой главе** диссертационной работы приводятся результаты аналитических исследований поведения напряжений в окрестности особых точек в двумерных задачах теории упругости, в том числе результаты, позволяющие построить области решений с сингулярностью и без сингулярности напряжений в пространстве геометрических параметров и упругих характеристик материала, определяющих эти решения. В качестве особых точек рассматриваются точки нарушения гладкости поверхности тела или границы контакта двух и более материалов, точки смены типа граничных условий, края поверхности контакта различных материалов. Рассматривается численный алгоритм, позволяющий получать результаты о поведении напряжений в окрестности особых точек в двумерных и трёхмерных задачах теории упругости, в том числе для анизотропных тел и тел, описываемых другими вариантами упругих моделей, в частности, моделью несимметричной теории упругости.

В **разделе 1.1** приводится сводная информация об аналитических решениях двумерных задач классической теории упругости в окрестности особых точек.

Рассматривается один из наиболее распространённых подходов анализа сингулярности напряжений, связанный с построением собственных решений для областей специального вида. В двумерных задачах это плоские однородные или составные клинья, где собственные решения для однородного клина в полярной системе координат с центром в вершине клина имеют вид

$$u_r = r^{\lambda}\xi_r(\varphi), \qquad u_{\varphi} = r^{\lambda}\xi_{\varphi}(\varphi). \tag{1}$$

Здесь $\lambda$ — собственные значения, $\xi_r, \xi_{\varphi}$ — собственные решения.

Для решений вида (1) при наличии значений $\lambda_k$, удовлетворяющих условию $0 < \operatorname{Re}\lambda_k < 1$, напряжения стремятся к бесконечности при $r \to 0$. Именно эти значения будут определять сингулярное поведение напряжений в окрестности особых точек.

Решения двумерных задач позволяют судить о поведении напряжений в распространённой на практике трёхмерной задаче — пространственном клине. Так, в известных работах показано, что решения задач о плоско-деформированном состоянии и антиплоской деформации для клиньев, полученных в перпендикулярных ребру пространственного клина плоскостях, определяют вид сингулярных напряжений в точках ребра, через которые проходят соответствующие плоскости. В работе приведены характеристические уравнения для нахождения собственных значений $\lambda$ при плоско-деформированном, плоско-напряжённом состояниях и антиплоской деформации для однородных и составных клиньев при различных вариантах однородных граничных условий на боковых гранях и граничных условий на поверхности контакта в составных клиньях. Главной целью данного раздела является построение в пространстве геометрических параметров и упругих характеристик материалов, определяющих поведение напряжений в окрестности особых точек, областей, где возможны или невозможны сингулярные решения.

В **разделе 1.2** анализируется возможность использования метода конечных элементов для анализа напряжённого состояния в окрестности особых точек и предлагается алгоритм нахождения собственного значения $\lambda$, определяющего порядок степенной зависимости напряжений вблизи особых точек. Численными экспериментами демонстрируется, что, используя сгущающиеся к особой точке конечно-элементные сетки и контролируя выполнение естественных граничных условий, можно обеспечить высокую точность решения вне некоторой окрестности особой точки с размерами этой окрестности, позволяющими судить о порядке степенной зависимости напряжений. Результаты раздела 1.1 позволяют сделать заключение, что наиболее распространён вариант сингулярного поведения напряжений, определяемый одним сингулярным собственным решением, то есть среди собственных значений $\lambda_1$ имеется только одно значение, удовлетворяющее условию $0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < 1$. В этом случае может быть найдена окрестность особой точки, где напряжения вдоль прямой, проходящей через особую точку, с достаточной точностью описываются зависимостью $\sigma = Ar^{\lambda_1 - 1}$, где $A$ — некоторая постоянная. Тогда внутри этой окрестности в точках $r_1^i, r_2^i, \ldots, r_n^i$, расположенных на $i$-х прямых $(i = 1, 2, \ldots, k)$, проходящих через особую точку, при действительных собственных значениях $\lambda_1$ с приемлемой точностью выполняются соотношения

$$\lambda_1 - 1 \approx \ln\left(\frac{\sigma_1^i}{\sigma_2^i}\right) \Big/ \ln\left(\frac{r_1^i}{r_2^i}\right) \approx \ln\left(\frac{\sigma_2^i}{\sigma_3^i}\right) \Big/ \ln\left(\frac{r_2^i}{r_3^i}\right) \approx \ldots \approx \ln\left(\frac{\sigma_{n-1}^i}{\sigma_n^i}\right) \Big/ \ln\left(\frac{r_{n-1}^i}{r_n^i}\right). \qquad (2)$$

Здесь $r_j^i$ — расстояния от особой точки; $\sigma_j^i$ — напряжения в точках $r_j^i$.

Суть алгоритма заключается в нахождении дискретизации, обеспечивающей с приемлемой точностью выполнение соотношения (2) в нескольких узловых точках. Для различных вариантов особых точек, в том числе и для трёхмерной задачи, путём сравнения с аналитическими результатами демонстрируются возможности данного алгоритма, позволяющего находить собственные значения $\lambda_1$ с погрешностью менее 1 %.

В **разделе 1.3** демонстрируется возможность разработанного алгоритма для анализа поведения напряжений в окрестности особых точек анизотропных упругих тел. Полученные собственные значения сравниваются с результатами других авторов.

**В разделе 1.4** на основе разработанной конечно-элементной процедуры вычисления показателей сингулярности напряжений выполнен анализ поведения напряжений в окрестности особых точек упругих тел, описываемых моделью несимметричной теории упругости, на двумерных задачах. Сравнение результатов численного анализа напряжений в окрестности различных типов особых точек упругих тел, описываемых моделями классической и несимметричной теорий упругости, показало, что порядки степенной зависимости напряжений в окрестности вершины трещины для этих моделей совпадают. Для вырезов, а также в особых точках, где имеет место смена типа граничных условий или контакт различных материалов, показатели сингулярности напряжений, полученные в рамках моделей классической и несимметричной теорий упругости, имеют количественные отличия. Величина этих отличий зависит от механических характеристик, определяющих моментное поведение материала. В частности, при использовании характеристик синтаксической пены (композиционный материал с полыми частицами) это различие достаточно мало для всех рассмотренных вариантов особых точек.

Во **второй главе** приведены результаты исследования аналитическими и численными методами сингулярности напряжений в окрестности особых точек упругих тел, выполненных из функционально-градиентных материалов. При использовании аналитических методов рассматривается решение задачи для плоского клина, вершина которого совпадает с центром полярной системы координат. Клин занимает область $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi \le \gamma$. В качестве функционально-градиентного материала рассматривается вариант зависимости упругих постоянных параметра Ламе $\lambda$ и модуля сдвига $\mu$ в виде степенного ряда по координате $r$

$$\lambda(r) = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3 + \ldots; \qquad \mu(r) = B_0 + B_1 r + B_2 r^2 + B_3 r^3 + \ldots. \tag{3}$$

Отметим, что при данном варианте представления упругих постоянных их значения в вершине клина будут равны $A_0$ и $B_0$ соответственно.

Решение для перемещений отыскиваются в виде обобщённого степенного ряда

$$u_r = \sum_{k=0}^{\infty} r^{k+\alpha} \overset{(k)}{\xi}_r(\varphi), \quad u_\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} r^{k+\alpha} \overset{(k)}{\xi}_\varphi(\varphi). \tag{4}$$

Искомые перемещения должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия в перемещениях и одному из вариантов однородных граничных условий на боковых гранях.

Подстановка принятого вида решения (4) в уравнения равновесия и приравнивание к нулю выражений при одинаковых степенях $r$ приводит к рекуррентной последовательности задач относительно функций $\overset{(k)}{\xi}_r(\varphi)$, $\overset{(k)}{\xi}_\varphi(\varphi)$:

$$\begin{gathered} B_0 \overset{(0)}{\xi''_r} + (A_0 + 2B_0)\left(\alpha^2 - 1\right)\overset{(0)}{\xi_r} + \left[(A_0 + B_0)\alpha - A_0 - 3B_0\right]\overset{(0)}{\xi'_\varphi} = 0, \\ (A_0 + 2B_0)\overset{(0)}{\xi''_\varphi} + B_0\left(\alpha^2 - 1\right)\overset{(0)}{\xi_\varphi} + \left[(A_0 + B_0)\alpha + A_0 + 3B_0\right]\overset{(0)}{\xi'_r} = 0; \end{gathered} \tag{5a}$$

$$
\begin{aligned}
& B_0 \overset{(1)}{\xi_r''} + (A_0 + 2B_0)\left(\alpha^2 + 2\alpha\right)\overset{(1)}{\xi_r} + \left[(A_0 + B_0)\alpha - 2B_0\right]\overset{(1)}{\xi_\varphi'} + \\
& + B_1 \overset{(0)}{\xi_r''} + \left[(A_1 + 2B_1)\left(\alpha^2 + \alpha\right) - 2B_1\right]\overset{(0)}{\xi_r} + \left[(A_1 + B_1)\alpha - 3B_1\right]\overset{(0)}{\xi_\varphi'} = 0, \\
& (A_0 + 2B_0)\overset{(1)}{\xi_\varphi''} + B_0\left(\alpha^2 + 2\alpha\right)\overset{(1)}{\xi_\varphi} + \left[(A_0 + B_0)\alpha + 2A_0 + 4B_0\right]\overset{(1)}{\xi_r'} + \\
& + (A_1 + 2B_1)\overset{(0)}{\xi_\varphi''} + B_1\left(\alpha^2 + \alpha - 2\right)\overset{(0)}{\xi_\varphi} + \left[(A_1 + B_1)\alpha + A_1 + 4B_1\right]\overset{(0)}{\xi_r'} = 0;
\end{aligned}
\tag{5б}
$$

…

Аналогично могут быть получены соответствующие последовательности для однородных граничных условий в перемещениях

$$\overset{(0)}{\xi_r} = 0, \quad \overset{(0)}{\xi_\varphi} = 0; \tag{6а}$$

$$\overset{(1)}{\xi_r} = 0, \quad \overset{(1)}{\xi_\varphi} = 0; \tag{6б}$$

…

и в напряжениях

$$(A_0 + 2B_0)\overset{(0)}{\xi_\varphi'} + \left((\alpha + 1)A_0 + 2B_0\right)\overset{(0)}{\xi_r} = 0, \quad \overset{(0)}{\xi_r'} + (\alpha - 1)\overset{(0)}{\xi_\varphi} = 0; \tag{7а}$$

$$(A_1 + 2B_1)\overset{(1)}{\xi_\varphi'} + \left((\alpha + 2)A_1 + 2B_1\right)\overset{(1)}{\xi_r} = 0, \quad \overset{(1)}{\xi_r'} + \alpha\overset{(1)}{\xi_\varphi} = 0; \tag{7б}$$

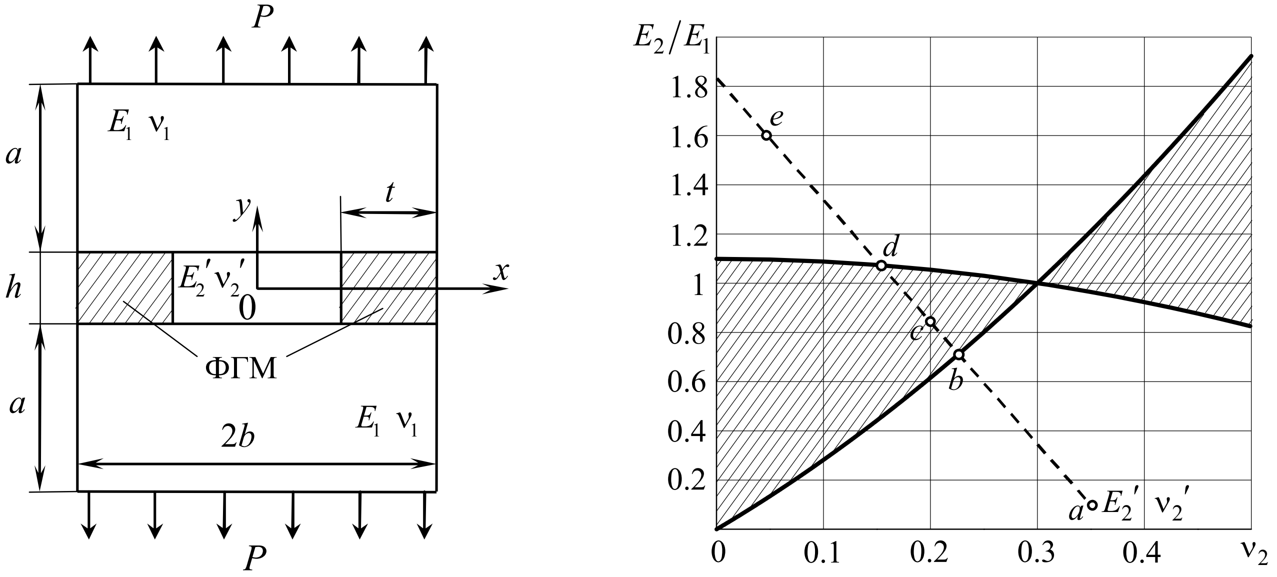
… .

Из анализа полученной рекуррентной последовательности задач (5) следует, что собственные значения $\alpha$ будут определяться первой системой уравнений (5а) относительно функций $\overset{(0)}{\xi_r}(\varphi)$, $\overset{(0)}{\xi_\varphi}(\varphi)$ и краевыми условиями (6а) или (7а).

Система уравнений (5а) с краевыми условиями (6а) или (7а) эквивалентна задаче Штурма – Лиувилля с соответствующими краевыми условиями для построения собственных решений для однородного клина с упругими постоянными $\lambda = A_0$, $\mu = B_0$.

Исходя из этого следует, что показатели $\alpha$ для клина из ФГМ, свойства которого непрерывно изменяются по радиусу, определяются геометрией клина (углом раствора) и значениями упругих характеристик в вершине клина $\lambda = A_0$, $\mu = B_0$.

Для обобщения результатов о поведении напряжений вблизи особых точек упругих тел, имеющих функционально-градиентные свойства, с использованием процедуры метода конечных элементов выполнен цикл численных экспериментов при других видах непрерывного изменения свойств. Например, рассмотрены задачи с особыми точками на поверхности тела, где имеет место скрепление различных материалов. Один из примеров таких задач, имитирующий клеевые соединения, приведён на рисунке 1, *а*. Здесь часть прослойки (клея), определяемая размером *t*, имеет градиентные свойства. Её упругие характеристики (модуль упругости $E_2$ и коэффициент Пуассона $\nu_2$) изменяются линейно или нелинейно по координате $x$ от значений $\nu_2^0, E_2^0$ на внешней поверхности ($x = \pm b$) до значений $\nu_2', E_2'$ в центральной однородной части прослойки ($-b + t < x < b - t$). В этом случае свойства прослойки вблизи особых




*а* *б*

Рисунок 1 — Трёхслойная пластина с прослойкой, содержащей подобласть из ФГМ (*а*); кривые, разделяющие в области параметров $E_2$ и $\nu_2$ решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений, при $\gamma_1 = \gamma_2 = \pi/2$, $E_1 = 10$ МПа, $\nu_1 = 0.3$ (штриховкой отмечены области решений без сингулярности) (*б*)

точек будут изменяться не только от радиуса, но и от угловой координаты полярной системы координат.

Для рассмотренной особой точки (рисунок 1, *а*), но при однородных свойствах материалов, поведение напряжений в её окрестности определяется величинами углов, образованных касательными в особой точке к внешней поверхности и поверхности контакта двух материалов, значениями коэффициентов Пуассона $\nu_1, \nu_2$ и отношением модулей $E_2/E_1$. В рассматриваемом примере $\gamma_1 = \gamma_2 = \pi/2$, значения $E_1$ и $\nu_1$ заданы. Следуя результатам, полученным в главе 1, можно в плоскости параметров $E_2$, $\nu_2$ построить кривую, разделяющую эту плоскость на области, в которых возможны и невозможны сингулярные решения (рисунок 1, *б*).

Расчёты выполнены при плоско-деформированном состоянии и различных значениях $E_2^0$, $\nu_2^0$, определяющих свойства ФГМ на внешнем крае прослойки. При этом $E_2^0$, $\nu_2^0$ выбирались таким образом, чтобы их значения в области параметров на рисунке 1, *б* соответствовали сингулярным, конечным или нулевым значениям напряжений в особых точках. Эти варианты значений $E_2^0$, $\nu_2^0$ отмечены на рисунке 1, *б* латинскими символами (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*). Расчёты показали, что для значений $E_2^0$, $\nu_2^0$, соответствующих точкам *a* и *e*, напряжения в окрестности особых точек при увеличении степени дискретизации стремятся к бесконечности, для значений, соответствующих точкам *b* и *d*, — имеют конечные значения, а для значений, соответствующих точке *c*, — стремятся к нулю.

Обобщая результаты численных экспериментов, можно сделать вывод о том, что поведение напряжений в окрестности различных вариантов особых точек упругих тел из ФГМ не зависит от вида непрерывного распределения упругих свойств в окрестности особых точек и определяется их значениями в этих точках.

**Третья глава** содержит результаты оптимизации геометрии и упругих характеристик материала в окрестности особых точек.

В **разделе 3.1** приводится математическая постановка задачи оптимизации геометрии и упругих характеристик материала в окрестности особых точек и её численная реализация. Для этого вводятся следующие функционалы:

$$F_i\left(S_{t_i}, E^*_{klmn}\right) = \max_{V_{t_i}} f\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{8}$$

где $S_{t_i}$, $V_{t_i}$ — часть поверхности $S$ или поверхности соединения различных материалов и объёма $V$ составного тела в окрестности особых точек $t_i$; $E^*_{klmn}\left(\vec{x}\right)$ — тензор упругих постоянных материалов составного тела в окрестности особых точек $t_i$; $f\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}\right)$ — заданная функция напряжений и деформаций в объёме $V_{t_i}$; $N$ — число особых точек.

В рассматриваемом варианте постановки задачи при наличии нескольких особых точек предполагается, что локальные изменения геометрии в окрестности любой из особых точек не влияют на напряжённое состояние в других особых точках. Основываясь на данном предположении, функционалы (8) могут рассматриваться независимо друг от друга.

На поверхности в окрестности особых точек могут быть наложены ограничения в виде равенств и неравенств. В рассматриваемой задаче оптимизации требуется найти поверхности $S_{t_i}$ и характеристики материала $E^*_{klmn}\left(\vec{x}\right)$, удовлетворяющие заданным ограничениям и минимизирующие функционал (8) либо обеспечивающие его значение меньше некоторой заданной величины.

В конкретных задачах оптимизации в качестве целевых функций $f$ могут приниматься различные комбинации компонент тензоров напряжений и деформаций, имеющие определенный механический смысл. Примерами таких функций являются интенсивность напряжений по Мизесу, интенсивность деформаций, максимальные главные напряжения, максимальные касательные напряжения.

Наряду с функционалом вида (8) могут быть рассмотрены и другие варианты функционалов. Для клеевых и адгезионных соединений достаточно актуальной является задача обеспечения однородного характера напряжённого состояния по поверхности соединения. Поиск оптимальной поверхности и оптимального варианта градиентных свойств материала в этом случае может быть выполнен при использовании функционала вида

$$F\left(S_{t_i}, E^*_{klmn}\right) = \int_{S_a} \left[\sigma\left(S\right) - \frac{1}{S_a} \int_{S_a} \sigma\left(S\right) ds\right]^2 ds. \tag{9}$$

Здесь $S_a$ — поверхность соединения двух материалов, $S_{t_i}$ — оптимизируемая геометрия клеевого или адгезионного соединения, $\sigma\left(S\right)$ — нормальные или касательные напряжения по поверхности $S$ для геометрии $S_{t_i}$.

При численной реализации рассматриваемых оптимизационных задач решение предлагается отыскивать на классе поверхностей и аппроксимаций механических характеристик, определяемых конечным числом параметров. В этом случае функционалы вида (8) превращаются в функцию параметров, определяющих класс поверхностей и вариант аппроксимации упругих характеристик материала $E_{klmn}^{*}(\vec{x})$, и задача минимизации функционала (8) при заданных ограничениях сводится к минимизации функции конечного числа переменных при соответствующих ограничениях, то есть к классической задаче нелинейного математического программирования.

Для расчёта напряжённо-деформированного состояния с целью вычисления значения целевой функции в процессе оптимизационного поиска используется процедура метода конечных элементов, реализованная в пакете ANSYS. При этом должна быть обеспечена достаточная точность вычислений в окрестности рассматриваемой особой точки. Кроме этого, необходимо учитывать, что оптимизация геометрии тела ведёт к изменению конечно-элементной модели в процессе оптимизационного поиска и соответственно к изменению точности расчётов. Для решения этой вычислительной проблемы использовались схемы создания сеток, которые на каждом этапе решения оптимизационной задачи позволяли обеспечить соизмеримые погрешности расчётов.

Оптимизация проводилась двумя методами: сначала методом аппроксимации, так как это позволяет эффективно провести исследование всей области варьирования параметров проекта, а затем методом первого порядка, в котором использовался найденный методом аппроксимации набор параметров проекта в качестве начального.

При решении двумерных задач для описания изменяемой части границы тела применялись сплайны первого и третьего порядков. Также рассмотрен вариант, представляющий интерес с точки зрения простоты технологической реализации. В этом варианте оптимизируемая поверхность аппроксимируется дугой окружности, а оптимизируемыми параметрами являются координаты её центра и радиус.

В **разделе 3.2** приводятся результаты решения модельных задач оптимизации геометрии и упругих постоянных материалов в окрестности различных вариантов особых точек. В качестве примеров перечислим некоторые из них: оптимизация геометрии части боковой поверхности однородного (рисунок 2, *а*) и составного (рисунок 2, *б*) цилиндров, оптимизация параметров функционально-градиентных пластины (рисунок 2, *в*) и клеевой прослойки (рисунок 2, *г*). Расчёты проводились для функционалов (8), (9), различных целевых функций $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$ и различных вариантов аппроксимации оптимизируемой геометрии.

Главным результатом решения рассматриваемых оптимизационных задач является обнаружение общего свойства у оптимальных геометрий и оптимальных характеристик материалов в окрестности особых точек. Это свойство формулируется следующим образом: совокупность параметров геометрии в окрестности особой точки и значений упругих постоянных в особой точке у оптимальных решений в соответствующей задаче о собственных решениях в этой особой точке определяет границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

Опираясь на полученные результаты о свойстве оптимальных решений в окрестности особых точек, можно, не решая оптимизационные задачи, подбирать геометрию в окрестности особых точек либо определять основные параметры ФГМ, обеспечивающие существенное снижение концентрации напряжений в окрестности особых точек. Например, можно выбрать оптимальные свойства прослойки (клея), со-

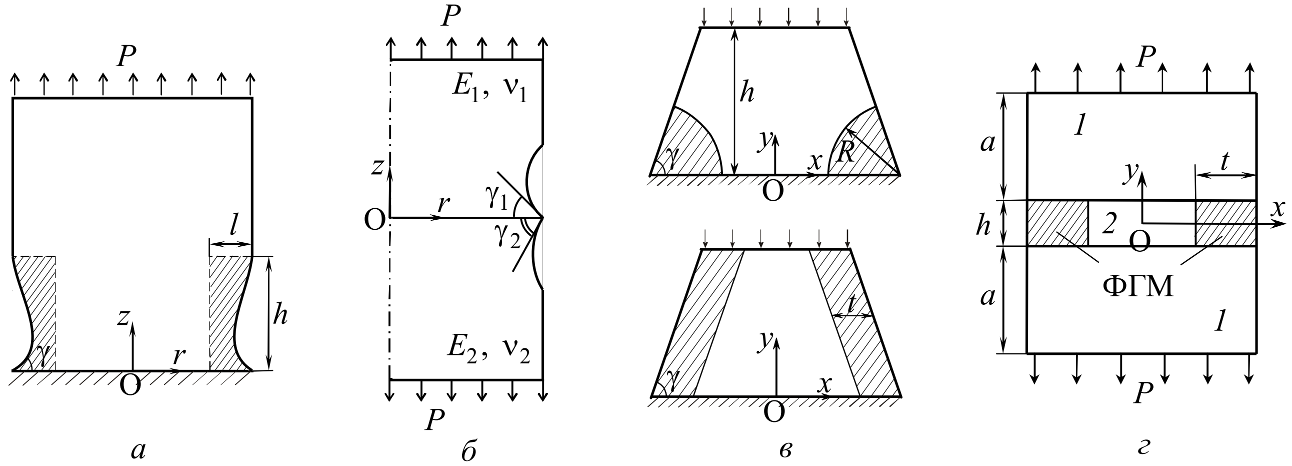



Рисунок 2 — Примеры задач оптимизации геометрии (*а*, *б*) и свойств (*в*, *г*)

единяющей(его) два различных материала (рисунок 3, *а*). В точках *a* и *b* возможны сингулярные решения. В первой главе есть вся необходимая информация для построения областей решений с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

Для рассматриваемого примера на рисунке 3, *б* приведены кривые, разделяющие решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений, в области параметров $E_2$, $\nu_2$ для точек *a* (сплошная линия) и *b* (пунктирная линия). В этом случае точки на сплошной кривой будут определять возможные оптимальные значения свойств функционально-градиентной прослойки в точке *a*, а точки, лежащие на пунктирной кривой, — в точке *b*. В данной ситуации возможен выбор материала, который устраняет концентрацию напряжений одновременно в точках *a* и *b*. Это будут общие точки для кривых семейства $E_2 : E_1$ и кривых семейства $E_3 : E_2$. Для рассматриваемых материалов такая точка единственная и имеет значения $E_2 = 1.1789$ МПа, $\nu_2 = 0.1$.

В качестве одного из вариантов практических приложений рассматриваемых в работе оптимизационных задач в **разделах 3.3 и 3.4** приводятся критический анализ стандартов определения прочности клеевых соединений на основе моделирования

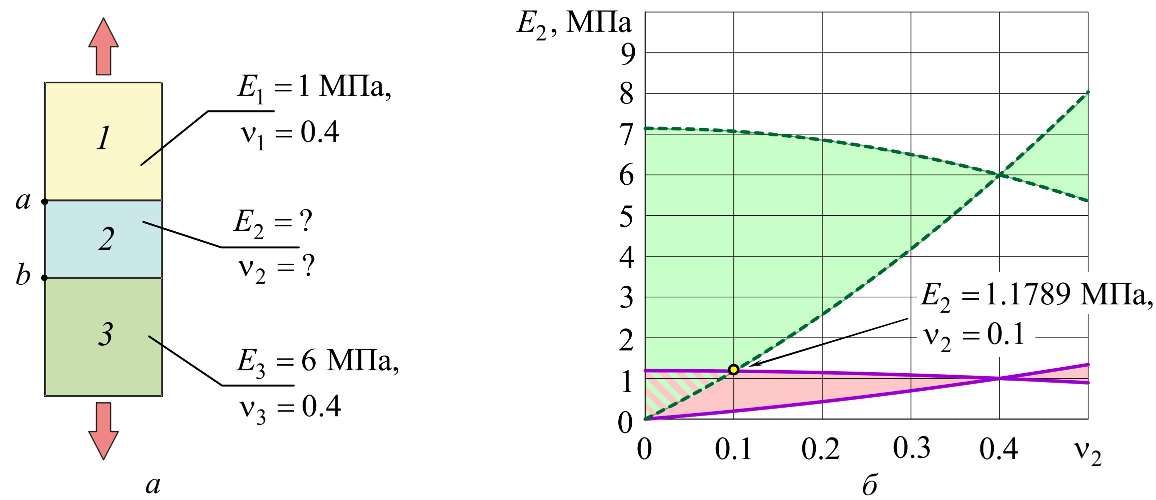



Рисунок 3 — *а*) Соединение двух материалов *1* и *3* через прослойку *2*; *б*) Кривые, разделяющие решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений в области параметров $E_2$ и $\nu_2$ (цветным фоном отмечены области решений без сингулярности) напряжённого состояния в испытываемых образцах и предложения, полученные с использованием свойств оптимальных решений в окрестности особых точек, по совершенствованию методов определения прочности клеевых соединений. Проанализировав более десятка российских и зарубежных стандартов определения прочности клеевых соединений, можно сделать заключение, что интерпретация результатов испытаний основана на предположении, что на поверхности клея и склеиваемого материала имеет место однородное распределение напряжений. Численными расчётами демонстрируется неправомочность этого допущения, так как в большинстве вариантов имеется существенная концентрация напряжений, обусловленная наличием особых точек. В связи с этим предлагается использовать закономерности, полученные для оптимальных решений в окрестности особых точек, для совершенствования методик испытания на прочность клеевых соединений.

В **разделе 3.4** также приведены результаты, связанные с уменьшением напряжений в клеевых соединениях внахлёстку. В соответствующих зарубежных журналах опубликован цикл работ, в которых для уменьшения напряжений предлагаются варианты изменения прямой геометрии краевого торца клеевого слоя с помощью специально сформированных внешних излишков клея (выжимок). Использование свойств оптимальных решений в окрестности особых точек позволило предложить для уменьшения напряжений более эффективные, по сравнению с известными, варианты клеевых выжимок [2].

В **заключении** представлены основные результаты диссертационной работы, приведены рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Систематизированы сингулярные решения для двумерных (и сводящихся к двумерным) задач теории упругости, обеспечивающие возможность для определения показателей сингулярности напряжений и построения границы между решениями с сингулярностью и без неё в пространстве параметров, определяющих эти решения.

2. Предложен численный алгоритм оценки показателя степенной зависимости напряжений в окрестности особых точек для различных задач теории упругости, позволяющий получать новые результаты для анизотропных тел, тел, описываемых моделью несимметричной теории упругости, и трёхмерных тел.

3. Аналитическими и численными методами установлено, что поведение напряжений в окрестности особых точек упругих тел из функционально-градиентных материалов такое же, как и в соответствующем по геометрии однородном теле с упругими характеристиками, совпадающими с константами функционально-градиентного материала в особой точке.

4. Предложена постановка задачи выбора геометрии и параметров функционально-градиентного материала в окрестности особых точек упругих тел, обеспечивающих оптимальное распределение заданной характеристики напряжённого состояния.

5. На основе решений задач оптимизации напряжённого состояния в окрестности особых точек различного типа обоснован вывод о том, что в оптимальном вариан-

те параметры геометрии окрестности особой точки и значения упругих постоянных в этой точке определяют границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

6. Продемонстрирована эффективность использования установленного свойства оптимальных решений в окрестности особых точек для снижения концентрации напряжений на поверхности соединения различных материалов, в том числе в клеевых и адгезионных соединениях.

По результатам диссертационной работы можно вырабатывать рекомендации по совершенствованию элементов конструкций и конструкций в целом, предлагать оптимальные решения. Остается поле для дальнейшего исследования сингулярности напряжений в окрестности особых точек трёхмерных тел с функционально-градиентными свойствами, в рамках других моделей нелинейной теории упругости.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ


1. **Матвеенко, В. П. Оптимизация геометрии составных упругих тел как основа совершенствования методик испытаний на прочность клеевых соединений / В. П. Матвеенко, А. Ю. Федоров // Вычисл. мех. сплош. сред. — 2011. — Т. 4, № 4. — С. 63–70.**
2. **Матвеенко, В. П. Оптимизация геометрии упругих тел в окрестностях особых точек на примере клеевого соединения внахлестку / В. П. Матвеенко, Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров // ПМТФ. — 2013. — № 5. — С. 180–186.**
3. **Корепанов, В. В. Численный анализ сингулярных решений двумерных задач несимметричной теории упругости / В. В. Корепанов, В. П. Матвеенко, А. Ю. Федоров, И. Н. Шардаков // Изв. РАН. МТТ. — 2013. — № 4. — С. 50–58.**
4. **Матвеенко, В. П. Анализ сингулярности напряжений в особых точках упругих тел из функционально-градиентных материалов / В. П. Матвеенко, А. Ю. Федоров, И. Н. Шардаков // ДАН. — 2016. — Т. 466, № 1. — С. 38–42.**
5. Севодина, Н. В. Об оптимизации формы упругих тел в окрестности особых точек с использованием пакета ANSYS / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров, А. В. Фонарев // Неравновесные переходы в сплошных средах: материалы всероссийской конференции молодых ученых. — Пермь, 2009. — С. 227–230.
6. Севодина, Н. В. Постановка задачи и разработка алгоритма оптимизации формы упругих тел в окрестности особых точек / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров, А. В. Фонарев // Современные проблемы математики и её прикладные аспекты: материалы всероссийской научно-практической конференции молодых учёных. — Пермь, 2010. — С. 128.
7. Севодина, Н. В. Поиск конструктивных решений для снижения концентрации напряжений в упругих телах [Электронный ресурс] / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров, А. В. Фонарев // VI Всероссийская конференция «Механика микронеоднородных материалов и разрушение»: материалы конференции. — Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН, 2010. — С. 1–6. — Режим доступа: http://www.imach.uran.ru/conf/mmp/doklad/d32.doc (дата обращения: 24.02.2016).

8. Севодина, Н. В. Снижение концентрации напряжений в зонах контакта неоднородных тел / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров, А. В. Фонарев // Математическое моделирование и краевые задачи: труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. — Самара: СамГТУ, 2010. — С. 321–324.
9. Fedorov, A. Critical and constructive analysis of the experimental schemes for evaluation of adhesive strength / A. Fedorov, V. Matveenko, N. Sevodina // 2nd International Conference on Engineering Optimization "EngOpt2010": book of abstracts. — Portugal, Lisbon: Instituto Superior Técnico, 2010. — P. 175–176.
10. Федоров, А. Ю. Влияние клеевой прослойки на напряжённое состояние в образцах для испытания на прочность клеевых соединений / А. Ю. Федоров // Вестн. Перм. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Вып. 5(9). — С. 183–186.
11. Fedorov, A. Yu. Application of singular solutions for optimization of geometry of specimens used for testing the strength of adhesive joints / A. Yu. Fedorov, V. P. Matveenko // Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics / ed. N. K. Gupta, A. V. Manzhirov, R. Velmurugan. — New Delhi: Elite Publishing House PVT LTD, 2013. — P. 156–167.
12. Севодина, Н. В. Сингулярные решения в вершинах составных плоских клиньев / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров // Прикладная математика, механика и процессы управления. — 2013. — Т. 1. — С. 74–85.
13. Fedorov, A. Yu. Optimization of geometry of adhesive joints [Электронный ресурс] / A. Yu. Fedorov, N. V. Sevodina // WCCM-ECCM-ECFD-2014: abstracts. — Spain, Barcelona, 2014. — P. 1–2. — Режим доступа: http://www.wccm-eccm-ecfd2014.org/admin/files/fileabstract/a1938.pdf (дата обращения: 24.02.2016)
14. Севодина, Н. В. Совершенствование методов определения прочности клеевых соединений на основе численного моделирования / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров // Вестник ПНЦ УрО РАН. — 2014. — № 2. — С. 4–11.
15. Матвеенко, В. П. Анализ сингулярности напряжений и задачи оптимизации напряжённого состояния в особых точках упругих тел из функционально-градиентных материалов [Электронный ресурс] / В. П. Матвеенко, А. Ю. Федоров // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. — Казань, 2015. — С. 2501–2503. — 1 электрон. опт. диск. (CD).