

На правах рукописи



Казак Михаил Сергеевич

**Новые методы моделирования акустических  
полей в рамках их модового представления в  
нерегулярных волноводах**

1.3.3 – Теоретическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Владивосток – 2023

Работа выполнена в *федеральном государственном бюджетном учреждении науки*

*Тихоокеанском океанологическом институте им. В. И. Ильичева.*

**Научный руководитель:** **Петров Павел Сергеевич**

д.ф.-м.н., заведующий лабораторией ФГБУН Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева, г. Владивосток

**Официальные оппоненты:** **Дзюба Владимир Пименович**

д.ф.-м.н., главный научный сотрудник ФГБУН Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

**Петров Михаил Игоревич**

к.ф.-м.н., старший научный сотрудник ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет ИТМО», г. Санкт-Петербург

**Ведущая организация:**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет»

Защита состоится 3 мая 2024 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета *24.2.296.02* при ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет», расположенном по адресу: *690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс-10, кампус ДВФУ, корпус G, аудитория 512.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет» и на официальном сайте университета по адресу: <https://www.dvfu.ru/upload/medialibrary/89c/t7dfokn0jffgl6st5udztd3qs2abvmqgh/%D0%94%D0%B8%D1%81%D1%81%D0%B5%D1%80%D1%82%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F.%20%D0%9A%D0%B0%D0%B7%D0%B0%D0%BA%20%D0%9C%D0%A1.pdf> .

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

к.ф.-м.н., доцент

*Дьяченко*

*Дьяченко О. И.*

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** В настоящее время во многих областях физики активно используются методы моделирования процессов различной природы, основанные на модовом представлении волновых полей. К этим областям относятся геофизика [1], квантовая механика [2], радиофизика [3], оптика [4; 5] и акустика океана [6]. Отметим, что в простейшем случае модовое представление физических полей различной природы возникает как результат реализации метода разделения переменных (метода Фурье) при решении уравнений, описывающих волновые процессы в случае, когда их коэффициенты не зависят от одной из пространственных переменных (или от времени). Прием, известный как квазиразделение переменных, или как метод поперечных сечений, позволяет обобщить указанное представление и на общий случай (когда коэффициенты зависят от упомянутой выше переменной). В этом случае вместо “глобальной” полной системы нормальных мод решения волновых уравнений представляются при каждом значении переменной в виде комбинации *локальных* мод волновода сравнения.

В акустике океана, в контексте задач которой будут представлены результаты настоящей работы, метод нормальных мод (или нормальных волн) был, по-видимому, впервые использован Пекерисом [7] в 1948 году. В работе рассматривалась простейшая двухслойная модель геоакустического волновода, до сих пор активно используемая в простейших аналитических моделях и оценках (водный слой лежащий над полубесконечной жидкой средой, моделирующей дно океана). В настоящее время, в связи с развитием численных методов решения задачи Штурма-Лиувилля, моды можно рассчитывать для сред со сколь угодно сложной стратификацией, а также с учетом упругих свойств пород, слагающих дно. Такие численные и численно-аналитические методы реализованы, в частности, в виде нескольких широко использующихся специалистами программных комплексов: COUPLE (Эванс, [8]), Осга (Вествуд, [9]), KRAKEN (Портер, [10]),

МРЕ (Трофимов и Козицкий, [11]).

Несмотря на их многочисленные достоинства, данные методы, основанные на модовом представлении поля, обладают также и рядом недостатков. Так, например, при расчете поля в нерегулярных геоакустических волноводах с неровным дном все они (за исключением МРЕ) опираются на ступенчатую аппроксимацию профиля дна, что, во-первых, может неочевидным образом сказаться на точности воспроизведения некоторых физических эффектов, а, во-вторых, приводит к низкой надежности вычислительных алгоритмов, вызванной необходимостью обращения плохо обусловленных матриц. Кроме того, во всех перечисленных подходах эффект обратного рассеяния либо не учитывается вовсе, либо, ввиду его слабой выраженности, учитывается величинами, принимающими значения на уровне вычислительной погрешности. Разработанные в настоящей работе метод ВКБ и метод инвариантного погружения [12], обобщенные на случай векторнозначных неизвестных функций, позволяют проводить расчеты коэффициентов в модовом представлении поля без использования ступенчатой аппроксимации для границы раздела акустических сред. Последний метод также позволяет получить явное уравнение для величин, описывающих волну обратного рассеяния, которая, таким образом, оказывается отделенной при проведении вычислений от волны прямого рассеяния, имеющей существенно большую амплитуду.

Хотя в последние годы развиты и некоторые методы расчета трехмерных звуковых полей в океане, основанные на их модовом представлении [11; 13; 14], в них также не либо не учитывается обратное рассеяние [11; 14], либо имеет место ступенчатая аппроксимация границы раздела двух сред, в частности, при наличии неоднородности рельефа дна, имеющей вращательную симметрию, например, подводной горы [13]). В настоящей работе для решения аналогичных задач развит метод, не требующий использования ступенчатой аппроксимации.

Заметим, что метод нормальных мод и различные его модификации (такие, как метод поперечных сечений или, например, метод модовых параболических

уравнений [15–17] составляют лишь один из общеупотребительных подходов к моделированию волновых полей наряду с методами прямой дискретизации волновых уравнений с использованием конечных элементов или конечных разностей, а также, например, с методом параболического уравнения [18] и лучевой теорией распространения волн [19–23] (и ее разновидностями, такими, как геометрическая оптика и геометрическая акустика). В частности, в акустике океана модовое представление полей используется наряду с другими методами, такими как метод гауссовых пучков, метод трассировки лучей, методы широкоугольных и псевдодифференциальных параболических уравнений [24–26], а также методы, основанные на интегральном представлении акустических полей. Несмотря на наличие перечисленных альтернатив, метод нормальных мод до настоящего времени сохраняет свою актуальность на практике, поскольку, во-первых, зачастую позволяет получить не только количественное представление о волновых процессах, но и их качественное понимание и, во-вторых, обеспечивает возможность понижения вычислительной сложности решаемой задачи. Данное понижение обеспечивается заменой сотен или тысяч точек дискретизации уравнения по одной из координат единицами или десятками мод.

**Степень разработанности темы исследования.** Настоящая диссертация является законченным научным исследованием, в котором представлено теоретическое описание новых методов расчета звуковых полей в волноводах мелкого моря, основанных на представлении данных полей в виде суперпозиции нормальных мод.

**Цели и задачи диссертационной работы:** Целью настоящей диссертации является дальнейшее развитие методов расчета двумерных волновых полей, основанных на их модовом представлении, для достижения большей эффективности их применения в практических задачах, в частности, связанных с моделированием распространения и обратного рассеяния звука в океане.

Для достижения поставленной цели в диссертационном исследовании были решены следующие задачи:

1. разработать метод вычисления модовых амплитуд для задач расчета акустических полей в двумерных волноводах, в рамках которого амплитудные уравнения могут быть проинтегрированы с шагом сетки, сравнимым с длиной волны;
2. разработать метод расчета модовых амплитуд в волне, рассеянной неоднородностью волновода в направлении источника (волны обратного рассеяния) с учетом взаимодействия мод;
3. разработать метод расчета модовых амплитуд акустического поля в задаче распространения звука в мелком море с неоднородностью рельефа дна с вращательной симметрией с учетом горизонтальной рефракции звука.

**Научная новизна** заключается в следующем:

1. Описано обобщение метода для решения задач распространения звука в подводных волноводах мелкого моря, основанное на ВКБ.
2. Представлена методика расчета акустического поля в трехмерных волноводах с вращательной симметрией. Показана связь между захваченными каньоном лучами и номерами мод.
3. Описан и применен для расчетов обобщенный метод инвариантного погружения, основанный на векторизовании. Метод позволяет решать уравнения на амплитуды с учетом взаимодействия мод и находить обратное рассеяние.
4. Спроектирован и реализован комплекс программ для MATLAB, использующий вышеперечисленные методы, результаты сопоставлены с результатами других программ для акустического моделирования.

**Теоретическая и практическая значимость.** В диссертации предложены несколько новых методов решения задач распространения звука в вол-

новодах мелкого моря. Также разработаны программы, реализующие вычисления акустических полей на основе этих методов. Описанные методы могут быть использованы на практике в тех сферах, где требуется моделирование акустических полей. В частности, результаты работы могут быть использованы при реализации методов дистанционного зондирования морской среды “на отражение” (посредством анализа поля, отраженного неоднородностями в толще воды и в дне), а также в задачах акустического мониторинга протяженных акваторий.

Теоретическая значимость состоит в том, что предложенные в работе методы и подходы представляют собой некоторые весьма естественные обобщения известных классических методов решения задач распространения волн, таких как скалярный метод ВКБ, скалярный метод инвариантного погружения. Аналоги данных методов, развитые в настоящем исследовании, состоят в их обобщении на случай, когда неизвестная величина описывается вектор-функцией, компоненты которой удовлетворяют некоторой системе связанных уравнений (в нашем случае речь идет о системе связанных уравнений для модовых амплитуд, или *mode coupling equations*). Также в работе предложено обобщение известного метода представления поля, рассеянного на цилиндрически симметричном объекте, в виде ряда по функциям Бесселя и Ханкеля. В данном случае в роли такого объекта выступают неоднородности рельефа дна, а вместо отражения от него имеет места горизонтальная рефракция звука.

**Методология и методы исследования.** Основные результаты диссертации состоят в выводе уравнений для модовых амплитуд в волноводах с неоднородностями различных типа. Данные уравнения получены с использованием аналитических и асимптотических методов математической физики, в том числе с использованием векторизованного аналога метода ВКБ, а также с использованием метода инвариантного погружения в матричной форме. В последней главе работы также используются методы теории специальных функций, а также лучевой теории для физической интерпретации результатов, связанных с

распространением звука над подводным каньоном.

Для численного решения уравнений векторизованных уравнений для модовых амплитуд в рамках метода ВКБ используются стандартные методы Рунге-Кутты. Для численного решения уравнений погружений для матричнозначных функций используется метод Эйлера в сочетании с экстраполяцией Ричардсона (что в комбинации также эквивалентно методу Рунге-Кутты соответствующего порядка).

**Положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие основные положения.

1. Разработан векторно-матричный аналог метода ВКБ. С помощью данного метода получены уравнения для амплитуд взаимодействующих мод в волноводе в приближении однонаправленного распространения волн. Показано, что данный метод позволяет корректным образом учитывать обмен энергией между модами в нерегулярном волноводе.
2. Разработано обобщение метода инвариантного погружения на случай матричных функций для расчета амплитуд взаимодействующих мод в нерегулярном волноводе с учетом обратного рассеяния. В рамках данного метода коэффициент отражения с учетом взаимодействия волноводных мод имеет вид матричнозначной функции, удовлетворяющей уравнению Риккати. Разработанный метод использован для анализа связи процессов обратного рассеяния и взаимодействия мод в нерегулярных акустических волноводах.
3. Разработан метод решения модельных задач адиабатического распространения волн в трехмерных слоистых волноводах с вращательной симметрией и плавными неоднородностями границ раздела слоев. В рамках данного подхода предложена методика выделения компоненты поля, формируемого обобщенными волнами шепчущей галереи.

**Апробация результатов.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих ведущих отечественных и зарубежных научных мероприятиях по физике распространения волн и акустике: “Days on Diffraction” – 2020, 2021, 2022 (г. Санкт-Петербург, ПОМИ РАН), “Underwater Acoustics Conference and Exhibition” (UACE) – 2021 (г. Каламата, Греция), XVII Школа-семинар им. акад. Л.М. Бреховских «Акустика океана», совмещенная с XXXIII сессией Российского акустического общества - 2020 (г. Москва), IX всероссийская конференция молодых учёных «Океанологические исследования» - 2021 (г. Владивосток), XXXIV сессия Российского акустического общества - 2022 (г. Москва), XXXV сессия Российского акустического общества - 2023 (г. Москва).

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 5 являются статьями в рецензируемых научных журналах [27–31] (три из которых индексируются в международных библиографических системах “Сеть науки” (Web of Science) и “Скопус” (Scopus)), а еще 6 работ опубликованы в сборниках материалов ведущих международных и российских научных мероприятий по данной тематике ([32–37]).

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором в рамках постановок задач, предложенных его научным руководителем.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и библиографии. **Общий объем диссертации 104 страницы, из них 77 страниц текста, включая 16 рисунков.** Библиография включает 105 наименований на 13 страницах.

**В первой главе** диссертации обсуждаются модовые представления волновых полей в квантовой механике, оптике, геофизике и акустике. Особое вни-

мание уделяется обзору методов моделирования волновых процессов на основе теории нормальных мод в акустике океана. При этом определяются основные понятия и вводятся основные уравнения, которые затем используются на протяжении всего текста работы. В частности, уравнение Гельмгольца, описывающие распространение волн от точечного источника (для определенности мы говорим об источнике звука в геоакустическом волноводе)

$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2}P = -\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_s), \quad (1)$$

где  $P(x, y, z)$  – акустическое давление,  $\omega = 2\pi f$  – циклическая частота,  $c = c(x, y, z)$  – скорость звука, а нижние индексы  $x, y, z$  означают частные производные по соответствующим переменным.

Поясняется, что решения  $P(x, y, z)$  таких задач могут быть представлены в виде ряда по модам (на практике – частичной суммы ряда)

$$P(x, y, z) = \sum_{m=1}^M A_m(x, y)\phi_m(z, x, y), \quad (2)$$

включающей в себя первые  $M$  распространяющихся мод.

В этом разложении нормальные моды  $\phi_j(z)$  определяются как решения задачи Штурма-Лиувилля вида

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi_j}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi_j = k_j^2\phi_j, \\ \phi_j|_{z=0} = 0, \\ \phi_j|_{z=h-0} = \phi_j|_{z=h+0}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\phi_j}{dz} \Big|_{z=h-0} = \frac{1}{\rho} \frac{d\phi_j}{dz} \Big|_{z=h+0}, \\ \phi_j|_{z=H} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

со спектральным параметром  $k_j^2$  (где  $k_j$  есть горизонтальное волновое число моды), вычисленные при фиксированной паре значений  $(x, y)$ , то есть в некотором заданном сечении вертикальной прямой слоя  $z \in [0, H]$ , в котором решается задача.

Коэффициенты  $A_m(x, y)$  в разложении (2) при этом называются модовыми

амплитудами, которые в общем случае удовлетворяют системе уравнений

$$A_{n,xx} + A_{n,yy} + k_n^2 A_n + \sum_{m=1}^N (V_{mn} - V_{nm}) A_{m,x} + \sum_{m=1}^N (W_{mn} - W_{nm}) A_{m,y} + \sum_{m=1}^N U_{mn} A_m = -\delta(x)\delta(y)\phi_n(z_s, 0, 0), \quad (4)$$

где коэффициенты взаимодействия мод определяются по формулам

$$V_{mn} = \int_0^H \frac{1}{\rho} \phi_{m,x} \phi_n dz, \quad W_{mn} = \int_0^H \frac{1}{\rho} \phi_{m,y} \phi_n dz, \quad U_{mn} = \int_0^H \frac{1}{\rho} (\phi_{m,xx} + \phi_{m,yy}) \phi_n dz.$$

Далее вводится векторно-матричная форма этих уравнений, которая получается путем объединения модовых амплитуд в вектор-столбец  $\mathbf{a}(x, y) = (A_1, A_2, \dots, A_m)$  (здесь  $(\cdot)^T$  означает транспонирование). Система (4) в этих обозначениях эквивалентна одному уравнению

$$\mathbf{a}_{xx} + \mathbf{a}_{yy} + \mathbf{K}^2 \mathbf{a} + \mathbf{V} \mathbf{a}_x + \mathbf{W} \mathbf{a}_y + \mathbf{U} \mathbf{a} = -\delta(x)\delta(y)\bar{\phi}(z_s), \quad (5)$$

где матрицы  $\mathbf{U}(x, y)$ ,  $\mathbf{W}(x, y)$ ,  $\mathbf{V}(x, y)$  определены соотношениями  $\mathbf{V}_{mn} = V_{mn} - V_{nm}$ ,  $\mathbf{W}_{mn} = W_{mn} - W_{nm}$ ,  $\mathbf{U}_{mn} = U_{mn}$ , а матрица  $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_M)$  (диагональная матрица, составленная из горизонтальных волновых чисел, т.е. такая что  $\mathbf{K}_{mn} = \delta_{mn} k_m$ ). Вектор-столбец в правой части уравнения (5) имеет вид

$$\bar{\phi}(z_s) = (\phi_1(z_s, 0, 0), \phi_2(z_s, 0, 0), \dots, \phi_M(z_s, 0, 0)).$$

Также в этой главе приводится краткое описание известных из литературы методов решения уравнений на модовые амплитуды. Векторизованный метод ВКБ

**Вторая глава** диссертации посвящена обобщенному на случай неизвестных вектор-функций методу ВКБ для решения системы связанных уравнений (5). В этой главе рассматривается вариант данного уравнения для двумерного волновода (его схема показана на рис. 1а) с одной горизонтальной координатой

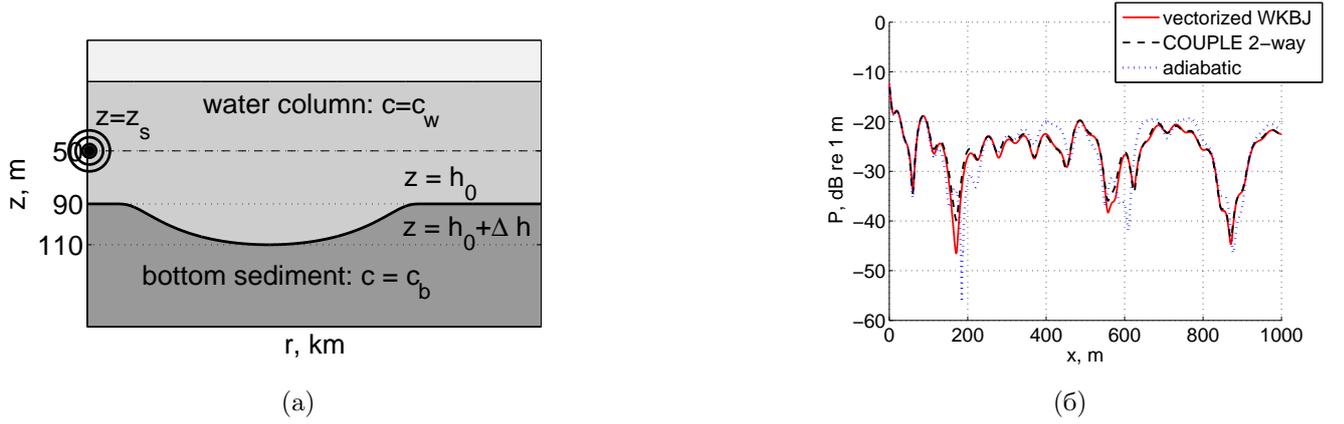


Рис. 1: а) Мелководный волновод в рассматриваемом численном примере. б) Зависимость акустического давления (в дБ отн. 1 м от источника) от горизонтальной координаты  $x$  в волноводе с подводной ямой. Векторизованное решение ВКБ (сплошная линия), 2-стороннее решение COUPLE (штриховая линия) и адиабатическое решение (пунктирная линия).

$x$  (когда параметры задачи не зависят от переменной  $y$ ):

$$\mathbf{a}_{xx} + \mathbf{K}^2 \mathbf{a} + \mathbf{V} \mathbf{a}_x + \mathbf{U} \mathbf{a} = -\delta(x) \bar{\phi}(z_s), \quad (6)$$

где матрицы коэффициентов определены в главе 1.

В уравнении (6) в реальных задачах вычислительной акустики океана можно пренебречь членом, содержащим  $\mathbf{U}(x)$ . Для упрощенного таким образом уравнения поставим краевую задачу, задав при  $x = 0$  условие  $A_m(0) = B_{m,0}$ , где коэффициенты  $B_{m,0}$  определяются по формуле

$$B_{m,0} = \frac{i\phi_m(z_s)}{2\rho(z_s)}.$$

Данная формула фактически описывает коэффициенты модового разложения поля точечного источника. При  $x = x_{max}$  потребуем выполнения условия

$$\left. \frac{dA_m}{dx} - k_{m,\infty} A_m \right|_{x=x_{max}} = 0,$$

представляющего собой некоторый вариант парциального излучения Свешникова.

Асимптотика решения данной краевой задачи, как показано в [30], может быть найдена в виде

$$\mathbf{a}(x) = \begin{pmatrix} B_1(x)e^{i\Phi_1(x)} \\ B_2(x)e^{i\Phi_2(x)} \\ \vdots \\ B_M(x)e^{i\Phi_M(x)} \end{pmatrix} = \exp(i\Phi(x))\mathbf{b}(x), \quad (7)$$

где  $\Phi(x) = \text{diag}(\Phi_1(x), \dots, \Phi_M(x))$ , и  $\mathbf{b}(x) = (B_1(x), \dots, B_M(x))^T$ .

После подстановки 7 в дифференциальное уравнение 6 и выполнения шагов метода ВКБ может быть, во-первых, получено уравнение для фазовой матрицы  $\Phi(x)$ , имеющее вид  $\Phi' = \mathbf{K}$  и допускающее решение в квадратурах  $\Phi_m(x) = \int_0^x k_m(x)dx$ .

В следующем порядке метода ВКБ получается также и уравнение для вектора огибающих модовых амплитуд  $\mathbf{b}(x)$ , которое имеет вид

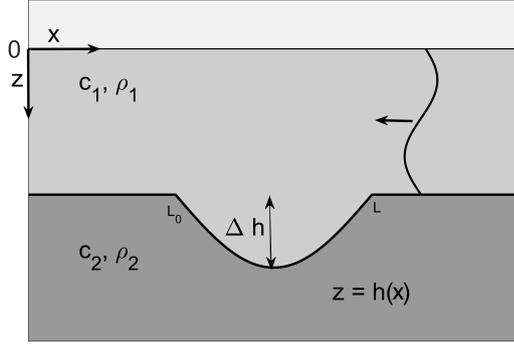
$$2\mathbf{K}(x)\mathbf{b}'(x) + \mathbf{K}'(x)\mathbf{b}(x) + e^{-i\Phi(x)}\mathbf{V}(x)e^{i\Phi(x)}\mathbf{K}(x)\mathbf{b}(x) = 0. \quad (8)$$

В качестве начального условия для последнего выступает  $B_j(0) = B_{j,0}$ . Заметим, что элементы матрицы  $\Xi = e^{-i\Phi(x)}\mathbf{V}(x)e^{i\Phi(x)}$ , описывающей взаимодействие мод в (8), могут быть найдены по формуле

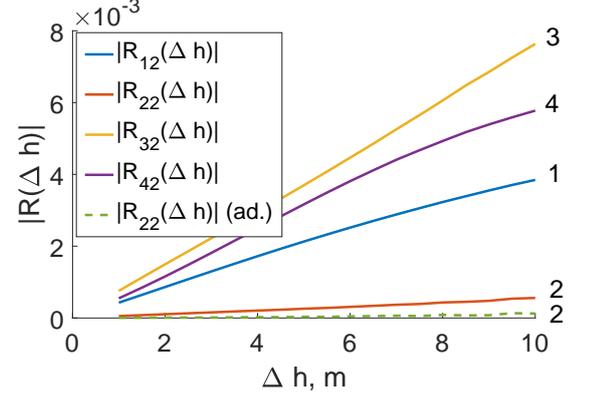
$$\Xi_{mn} = \mathbf{V}_{mn}e^{i\Phi_n(x) - i\Phi_m(x)}.$$

Приводится пример расчета акустического поля с использованием обобщенного ВКБ метода, и результаты сравниваются с результатами, полученными с помощью других методов (см. рис. 16).

Отмечается, что поскольку векторизованный метод ВКБ позволяет, в частности, перейти от уравнений для модовых амплитуд  $\mathbf{a}(x)$  к уравнениям для их огибающих  $\mathbf{b}(x)$ , результирующая задача Коши может решаться на весьма грубой сетке по эволюционной переменной  $x$  (например, шаг сетки в примерах из работы [30] составляет  $\lambda/2$ ). Таким образом, уравнения для модовых ампли-



(а)



(б)

Рис. 2: а) Схема волновода в мелком море с неоднородностью рельефа дна. б) Коэффициенты отражения как функции вариации глубины моря  $\Delta h$ , связанной с наличием в волноводе неоднородности рельефа дна в виде подводной ямы. Вторая падающая мода.

туд, полученные с помощью метода ВКБ, обеспечивают гораздо более высокую скорость расчета акустических полей на практике.

**В третьей главе** описывается метод инвариантного погружения для связанных модовых амплитуд. Как и во второй главе здесь рассматривается решение задачи для уравнений на модовые амплитуды (6). Схема волновода из этой задачи показана на рис. 2а.

Следуя работе [28] без ограничения общности предполагается, что источник сигнала расположен в точке  $x = L = 0$ , и рассматривается задача о генерируемом им тональном сигнале на слой  $[L_0, L]$ , находящийся слева от него.

Задача расчета поля в таком волноводе может быть сведена к вспомогательной матричной краевой задаче [28]

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{V}(x) \frac{d}{dx} \right) \mathbf{A}(x, L) + (\mathbf{K}^2(L) + \mathbf{U}(L)) \mathbf{A}(x, L) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{A}(L_0, L)}{\partial x} + i\mathbf{K}_0 \mathbf{A}(L_0, L) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{A}(L, L)}{\partial x} - i\mathbf{K}_0 \mathbf{A}(L, L) &= -\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (9)$$

Полагается, что неизвестная матрица  $\mathbf{A}(x, L)$  параметрически зависит от положения правой границы нерегулярного участка волновода. Её столбцы суть

$M$  векторов-столбцов  $\mathbf{a}_m$ , каждый из них представляет собой решение задачи рассеяния  $m$ -й нормальной моды на данном нерегулярном участке и является решением уравнения (5).

Решение уравнения (6) связано с решением задачи (9) соотношением

$$\mathbf{a}(x) = 2i\mathbf{K}_0\mathbf{A}(x)\bar{\phi}(z_s), \quad (10)$$

поскольку при решении (9) одновременно решается задача рассеяния каждой из  $M$  мод на нерегулярном участке волновода, а каждый столбец результирующей матрицы  $\mathbf{A}(x)$  соответствует рассеянию одной из них. Формула (10) соответствует представлению поля точечного источника в виде линейной комбинации возбуждаемых им мод.

Пользуясь методом инвариантного погружения ([28], см. также третью главу настоящей диссертации), матричную краевую задачу 9 сводят к паре вспомогательных задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на матрициант (матричнозначную неизвестную функцию). Первая задача Коши служит, собственно, для определения матрицы  $\mathbf{A}(x; L)$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{A}(x, L)}{\partial L} = \mathbf{A}(x, L) [\mathbf{V}(L) + i\mathbf{K}_0 + (-\mathbf{V}(L) + i\mathbf{K}_0) i\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}^2(L) + \mathbf{U}(L)] \mathbf{A}_L, \quad (11)$$

и начальному условию

$$\mathbf{A}(x, L) |_{L=x} = \mathbf{A}(x, x) = \mathbf{A}_x. \quad (12)$$

В этих соотношениях, по определению,  $\mathbf{A}(L, L) \equiv \mathbf{A}_L(L)$ . Данная функция, необходимая для решения (11), находится путем решения задачи Коши для уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}_L}{dL} = \mathbf{A}_L [-\mathbf{V}(L) + i\mathbf{K}_0] i\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}^2(L) + \mathbf{U}(L) \mathbf{A}_L + \\ + \mathbf{A}_L i\mathbf{K}_0 + i\mathbf{K}_0 \mathbf{A}_L + \mathbf{A}_L \mathbf{V}(L) - \mathbf{E}, \quad (13) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\mathbf{A}_{L_0} = \mathbf{A}(L_0, L_0) = (2i\mathbf{K}_0)^{-1}. \quad (14)$$

Метод инвариантного погружения позволяет учитывать обратное рассеяние звука, причем матричный коэффициент можно рассчитать по формуле

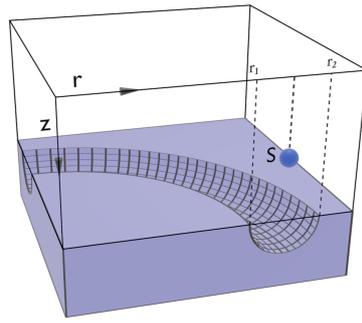
$$\mathbf{R}(L) = 2i\mathbf{K}_0\mathbf{A}_L - \mathbf{E}. \quad (15)$$

Элемент матрицы  $\mathbf{R}_{mn}$  соответствует доле акустической энергии, приходящейся на  $m$ -ую моду в отраженно от неоднородного участка поле, полученном при рассеянии на нем  $n$ -ой моды.

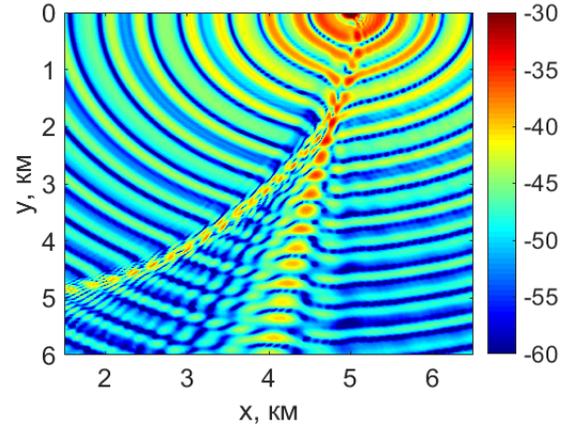
Несколько конкретных задач были решены с помощью данного метода. Рис. 26 был получен для второй падающей моды. Сплошные линии представляют зависимость амплитуд различных мод в отраженном поле от величины неоднородности  $\Delta h$ , а пунктирная линия – коэффициент отражения, рассчитанный в адиабатическом приближении (то есть без учета межмодового взаимодействия).

Легко видеть, что значения “неадиабатических” коэффициентов отражения намного больше соответствующих величин, полученных в адиабатическом приближении. Падающие моды возбуждают моды с другими номерами в отраженном поле (амплитуда моды с тем же номером, что у падающей моды, в отраженной волне относительно мала). На основании этих наблюдений делается вывод о том, что обратное рассеяние нормальных волн в нерегулярных волноводах нельзя рассматривать отдельно от эффекта взаимодействия мод.

Отмечается, что (11) и (13) вместе образуют систему уравнений метода инвариантного погружения (или, коротко, уравнения погружения) [12]. Данный метод позволят полностью учитывать обратное рассеяние, не требуя при этом решения краевых задач для эллиптических уравнений (для обоих уравнений погружения ставится задача Коши, которая может быть решена элементарными средствами, например, методами Рунге-Кутты). Недостатком метода является



(a)



(б)

Рис. 3: а) Схематическое изображение волновода мелкого моря с изогнутым подводным каньоном. Проекцией каньона на горизонтальную плоскость является кольцо, ограниченное окружностями  $r = r_1$  и  $r = r_2$ . Источник звука  $S$  расположен в водном слое над каньоном. б) Уровни акустического давления (в дБ отн. 1 м от источника), 4 вертикальные моды,  $N_\theta = 1200$ .

то, что при решении уравнения (11) приходится выбирать сетку таким образом, чтобы хорошо разрешались отдельные волны. Это обстоятельство существенным образом ограничивает его применимость на практике. Данного недостатка лишен, однако, векторизованный метод ВКБ.

**В четвертой главе** описываются трехмерные задачи с вращательной симметрией.

В начале главы рассматривается трехмерное уравнение Гельмгольца, записанное в цилиндрических координатах для акустического давления  $P(r, \theta, z)$  в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$ , где  $r$  есть расстояние от оси симметрии волновода,  $\theta$  – угловая (азимутальная) координата, а  $z$  – глубина.

Батиметрия в волноводе мелкого моря, показанном на рис. 3а, описывается соотношением

$$z = H(r, \theta) = H_0 + \delta H V(r), \quad (16)$$

где  $H_0$  – глубина моря вдали от каньона (“невозмущенная” глубина),  $\delta H$  – глу-

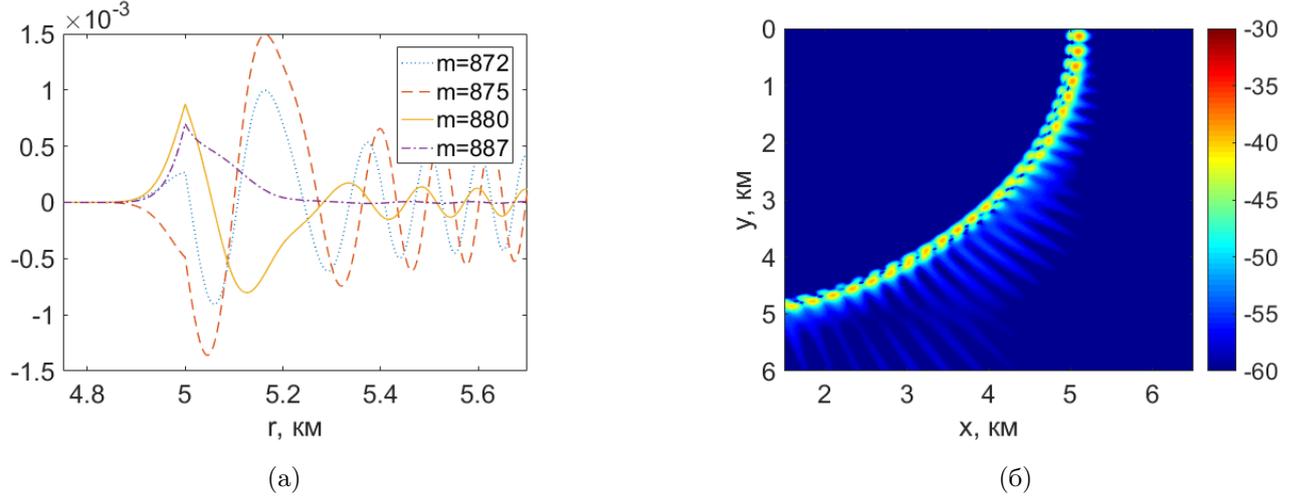


Рис. 4: а) Радиальные профили  $Q_{4,m}(r)$  нескольких компонент поля четвертой моды, захваченных подводным каньоном. б) Горизонтальные лучи для четвертой вертикальной моды ( $j = 4$ , учтены только  $m$  от 875 до 887).

бина каньона,  $V(r)$  – функция, описывающая форму поперечного сечения каньона (радиальный профиль возмущения глубины), такая что  $\max V(r) = 1$ . Мы будем считать, что носителем функции  $V(r)$  является отрезок  $[r_1, r_2]$ , т.е. что горизонтальной проекцией каньона является кольцо с границами  $r = r_1$  и  $r = r_2$ .

Для данной задачи уравнение на модовые амплитуды (4) записывается в адиабатическом приближении и полярных координатах в горизонтальной плоскости:

$$\frac{\partial^2 A_j(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_j(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_j(r, \theta)}{\partial \theta^2} + A_j(r, \theta) k_j^2 = -\frac{\phi_j(r, \theta, z_s)}{r} \delta(r - r_s) \delta(\theta - \theta_s). \quad (17)$$

В дальнейшем в главе рассматривается краевая задача, получающаяся добавлением к уравнениям (17) условия излучения при  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ .

Решение этой задачи представимо в виде разложения

$$A_j(r, \theta) = \sum_{m=0}^{N_\theta} Q_{j,m}(r) \psi_m(\theta), \quad (18)$$

где  $\psi_m^0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(m\theta)$ .

Подставляя суперпозицию гармоник (18) в уравнение (17), а затем пользуясь тем, что  $\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \theta^2} = -n^2 \psi_m$ , можно упростить получившееся равенство, после чего нужно применить к обеим его частям оператор  $\int (\cdot) \psi_m(\theta) d\theta$ . Воспользовавшись ортогональностью системы собственных функций  $\psi_m^0(\theta)$ , можно получить уравнения для радиальных компонент решения  $Q_{j,m}(r)$

$$\frac{\partial^2 Q_{j,m}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{j,m}}{\partial r} + Q_{j,m} k_j^2 - \frac{m^2}{r^2} Q_{j,m} = -\frac{1}{r} \frac{\phi_m(r, z_s)}{\rho} \delta(r - r_s) \psi_m(0). \quad (19)$$

Вне отрезка  $[r_1, r_2]$  уравнение (19) имеет постоянные коэффициенты и фактически сводится к уравнению Бесселя. Из условия ограниченности решения при  $r = 0$  делается вывод, что при  $r \leq r_1$  оно должно с точностью до константы представлять собой функцию Бесселя

$$Q_{jm}(r) = \alpha_{jm} J_m(k_j r), \quad \text{при } r \leq r_1. \quad (20)$$

В то же время из условия излучения на бесконечности следует, что при  $r \geq r_2$ , решение должно обращаться в функцию Ганкеля первого рода, т.е.

$$Q_{jm}(r) = \beta_{jm} H_m^{(1)}(k_j r), \quad \text{при } r \geq r_2. \quad (21)$$

Теперь осталось лишь найти значения функции  $Q_{j,m}(r)$  на отрезке  $[r_1, r_2]$ . С этой целью составляется нормальная система, эквивалентная уравнению (19)

$$\begin{cases} \frac{dQ_{jm}}{dr} = P_{jm} \\ \frac{dP_{jm}}{dr} = -\frac{1}{r} P_{jm} + \left( \frac{m^2}{r^2} - k_j^2 \right) Q_{jm} \end{cases}. \quad (22)$$

Решение этой системы может быть найдено методом двустороннего численного интегрирования. Сначала она решается на отрезке  $[r_1, r_s]$ , начиная с точки  $r = r_1$ , и используя начальное условие

$$Q^0(r_1) = J_m(k_j r_1), \quad P^0(r_1) = dJ_m(k_j r)/dr|_{r=r_1}, \quad (23)$$

с тем чтобы найти величину решения и его производной  $Q^{left} = Q_{jm}(r_s)$ ,  $P^{left} = P_{jm}(r_s)$  слева от точки излучения  $r = r_s$ . После этого эта система решается на

отрезке  $[r_s, r_2]$  с начальным условием

$$\begin{cases} Q^0(r_2) = H_m^{(1)}(k_j r_2), \\ P^0(r_2) = dH_m^{(1)}(k_j r)/dr|_{r=r_2} \end{cases} \quad (24)$$

при  $r = r_2$ . В результате получаются значения функции  $Q(r)$  и ее производной  $Q^{right} = Q_{jm}(r_s)$ ,  $P^{right} = P_{jm}(r_s)$  справа от точки излучения  $r = r_s$ .

Наличие в правой части (19) дельта-функции (источника, сосредоточенного при  $r = r_s$ ) эквивалентно тому, что решения системы (22) удовлетворяют следующим условиям

$$\beta_{jm} Q^{right} - \alpha_{jm} Q^{left} = 0, \quad \beta_{jm} P^{right} - \alpha_{jm} P^{left} = -\frac{\phi_m(z_s)}{r_s}. \quad (25)$$

при  $r = r_s$  (непрерывность  $Q(r)$  и наличие у  $P(r)$  разрыва первого рода).

Равенства (25) образуют систему линейных алгебраических уравнений, из которой легко определить коэффициенты  $\alpha_{jm}$  и  $\beta_{jm}$ , и, таким образом, найти вид решения (19) на отрезке  $[r_1, r_s]$ .

Также в данной главе используется теория геометрической акустики. Из закона Снеллиуса выводится уравнение, связывающее номера  $m$  компонент решения с горизонтальными лучами, которые захватываются каньоном:

$$k_{\min} r_2 < m < r_{\max} k(r_{\max}), \quad (26)$$

где  $r_{\max}$  – точка, в которой функция  $r k(r)$  имеет максимум на отрезке  $[r_1, r_2]$ ,  $k_{\min}$  – минимум функции  $k(r)$  на  $[r_1, r_2]$ . Для примера, рассматриваемого в данной главе, неравенство принимает вид:

$$874,6199 < m < 887,9958. \quad (27)$$

На рис. 4а показаны графики функций  $Q_{4,m}(r)$ . Видно, что энергия соответствующих компонент решения  $Q_{4,m}(r)\psi_m(\theta)$  локализована в горизонтальной плоскости в относительно узком кольце, являющемся проекцией «внешней» половины каньона. Контурный график акустического поля, формируемого этими компонентами, отдельно показан на рис. 4б.

**В заключении** сформулированы результаты диссертационной работы.

## Цитированная литература

1. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология Т. 1, 2. Пер с англ. — 1983.
2. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теоретическая физика. В 10 т. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория)-6-е изд. — 2004.
3. *Ойнац А. В.* Численное моделирование характеристик декаметровых радиосигналов в рамках метода нормальных волн : дис. ... канд. / Ойнац Алексей Владимирович. — Иркутск: ИСЗФ СО РАН, 2009, 2009.
4. Вычисление нормальных мод закрытых волноводов / М. Д. Малых [и др.] // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. — 2020. — Т. 28, № 1. — С. 62—76.
5. Propagation of normal modes in multilayer optical waveguides I. Component fields and dispersion characteristics / A. S. Belanov [и др.] // Soviet Journal of Quantum Electronics. — 1976. — Т. 6, № 1. — С. 43.
6. *Алексеев Г. В.* Метод нормальных волн в подводной акустике. — 2006.
7. *Pekeris C. L.* Theory of propagation of explosive sound in shallow water. — 1948.
8. *Evans R. B.* A coupled mode solution for acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variations of a penetrable bottom // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1983. — Т. 74, № 1. — С. 188—195.
9. *Westwood E. K., Tindle C. T., Chapman N. R.* A normal mode model for acousto-elastic ocean environments // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1996. — Т. 100, № 6. — С. 3631—3645.
10. *Porter M., Reiss E. L.* A numerical method for ocean-acoustic normal modes // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1984. — Т. 76, № 1. — С. 244—252.

11. *Trofimov M. Y., Kozitskiy S., Zakharenko A.* A mode parabolic equation method in the case of the resonant mode interaction // *Wave Motion*. — 2015. — T. 58. — C. 42–52.
12. *Babkin G., Klyatskin V.* Invariant imbedding method for wave problems // *Wave motion*. — 1982. — T. 4, № 3. — C. 195–207.
13. *Luo W., Schmidt H.* Three-dimensional propagation and scattering around a conical seamount // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2009. — T. 125, № 1. — C. 52–65.
14. *Petrov P. S., Petrova T. N.* Asymptotic solution for the problem of sound propagation in a sea with an underwater canyon // *Journal of the Acoustical Society of America*. — 2014. — T. 136. — EL281–EL287.
15. *Collins M. D.* The adiabatic mode parabolic equation // *Journal of the Acoustical Society of America*. — 1993. — T. 94. — C. 2269–2278.
16. *Trofimov M. Y.* Narrow-angle parabolic equations of adiabatic single-mode propagation in horizontally inhomogeneous shallow sea // *Acoustical Physics*. — 1999. — T. 45. — C. 575–580.
17. Wide-angle mode parabolic equations for the modelling of horizontal refraction in underwater acoustics and their numerical solution on unbounded domains / P. S. Petrov [и др.] // *Journal of Sound and Vibration*. — 2020. — T. 484. — C. 115526.
18. *Hardin R. H.* Application of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations // *Siam Rev.* — 1973. — T. 15. — C. 423.
19. *Lichte H.* On the influence of horizontal temperature layers in sea water on the range of underwater sound signals. — *Tracor Sciences & Systems*. — C. 385–389.

20. *Porter M. B.* Beam tracing for two-and three-dimensional problems in ocean acoustics // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Т. 146, № 3. — С. 2016—2029.
21. *Moraes Calazan R. de, Rodríguez O. C.* Simplex based three-dimensional eigenray search for underwater predictions // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2018. — Т. 143, № 4. — С. 2059—2065.
22. *Babich V., Pankratova T.* Discontinuities of Green's function in a mixed boundary value problem for a wave equation with a variable coefficient // Theory of functions. Spectral theory. Wave propagation. (A 74-10470 01-23) Leningrad, Izdatel'stvo Leningradskogo Universiteta, 1973, — 1973. — С. 9—27.
23. *Popov M. M.* A new method for computing wave fields in a high-frequency approximation // Mathematical Aspects of Wave Propagation Theory. 11. — 1981. — С. 195—216.
24. *Трофимов М. Ю., Захаренко А. Д., Козицкий С. Б.* Модовые параболические уравнения в акустике океана // Дальневосточные моря России. — 2007. — С. 385—395.
25. *Трофимов М. Ю.* Узкоугольные параболические уравнения адиабатического распространения звука одной моды в горизонтально неоднородном мелком море // Акустический журнал. — 1999. — Т. 45, № 5. — С. 647—652.
26. *Рутенко А. Н., Фершалов М. Ю.* 3-D моделирование акустического поля, формируемого на шельфе во время забивки фундаментных свай на берегу // XV школа-семинар им. акад. Л.М. Бреховских "Акустика океана". — 2016. — С. 240—243.

## Основные публикации по теме диссертации

27. *Казак М. С., Петров П. С.* Об адиабатическом распространении звука в мелком море с изогнутым подводным каньоном // Акустический журнал. — 2020. — Т. 66, № 6. — С. 613—621.
28. *Kazak M., Koshel K., Petrov P.* Generalized form of the invariant imbedding method and its application to the study of back-scattering in shallow-water acoustics // Journal of Marine Science and Engineering. — 2021. — Т. 9, № 9. — С. 1033.
29. *Казак М., Петров П., Кошель К.* Исследование обратного рассеяния акустических мод на неоднородностях рельефа дна с использованием метода инвариантного погружения // Подводные исследования и робототехника. — 2021. — № 2. — С. 76—81.
30. *Petrov P. S., Kazak M. S., Petrova T. N.* A generalization of WKBJ method for solving a system describing propagation of coupled modes in underwater acoustics // Physics Letters A. — 2022. — Т. 450. — С. 128383.
31. Современные методы расчета акустических полей в океане, основанные на их представлении в виде суперпозиции мод / А. Тыщенко [и др.] // Акустический журнал. — 2023. — Т. 69, № 5. — С. 620—636.
32. *Kazak M. S., Petrov P. S.* On the adiabatic sound propagation in a shallow sea with a curved underwater canyon // International conference «Days on Diffraction 2020». — St. Petersburg, 2020. — С. 21—22.
33. *Kazak M. S., Petrov P. S., Koshel K. V.* The study of acoustic modes back-scattering by bottom relief inhomogeneities using the invariant imbedding method // International conference «Days on Diffraction 2021». — St. Petersburg, 2021. — С. 21—22.

34. *Petrov P. S., Kazak M. S., Katsnelson B. G.* Excitation of whispering gallery waves in sea area with bowl-like bottom by an external source // International conference «Days on Diffraction 2022». — St. Petersburg, 2022. — С. 47–48.
35. *Казак М. С., Петров П. С.* Об адиабатическом распространении звука в мелком море с изогнутым подводным каньоном // IX всероссийская конференция молодых учёных «Океанологические исследования». — Владивосток, 2021. — С. 13.
36. *Казак М. С., Кошель К. В., Петров П. С.* Матричная форма метода инвариантного погружения и ее использование в задачах распространения звука в океане // XXXIV Сессия Российского акустического общества. — Москва, 2022.
37. *Казак М. С., Петрова Т. Н., Петров П. С.* Обобщение ВКБ метода для решения системы, описывающей распространение связанных мод в подводной акустике // XXXV Сессия Российского акустического общества. — Москва, 2023. — С. 274.

*Научное издание*

Казак Михаил Сергеевич

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Новые методы моделирования акустических полей в рамках их модового представления в нерегулярных волноводах

Подписано в печать \_\_.\_\_.\_\_\_\_. Заказ \_\_\_\_\_.

Формат 60 × 90 1/16. Тираж 110 экз.

Отпечатано в типографии ТОИ ДВО РАН