

На правах рукописи

Петров

**Петров Сергей Сергеевич**

**Новая модель динамики-термодинамики морского льда на  
кусочно-гладкой поверхности и ее параллельная численная  
реализация на неструктурированных треугольных сетках**

Специальность 1.2.2 —  
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук  
**Яковлев Николай Геннадьевич**

Официальные оппоненты: **Вабищевич Петр Николаевич**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
главный научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук

**Дюкина Надежда Сергеевна**,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится 4 октября 2023 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета 24.1.455.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, ауд. 727.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИВМ РАН и на сайте <https://www.inm.ras.ru>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, ИВМ РАН, ученому секретарю диссертационного совета 24.1.455.01.

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
24.1.455.01,  
д.ф.-м.н.



Бочаров Геннадий Алексеевич

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Модели динамики-термодинамики морского льда имеют три основных приложения на практике. Во-первых, они применяются для формирования краткосрочных прогнозов состояния льда для навигации ледоколов и транспортных судов. Вероятное потепление климата может значительно увеличить использование Северного морского пути из Дальнего Востока в Европу, однако, в ноябре 2021 года была аномальная ситуация с образованием толстого льда, что говорит о том, что задача моделирования дрейфа льда не утрачивает актуальности<sup>1</sup>. Во-вторых, важным вопросом стал перенос загрязняющих веществ дрейфующим морским льдом. В частности, для оценки риска разливов нефти и ее ликвидации, требуются соответствующие модели переноса и распространения нефти для покрытых льдом морей<sup>2</sup>. В-третьих, модели динамики-термодинамики морского льда являются неотъемлемой частью современных климатических и прогностических моделей Земной системы. В основном это связано с необходимостью предсказания изменения ледяного покрова, которое существенно влияет на планетарное альбедо и циркуляцию океана<sup>3</sup>.

Задача двумерного дрейфа морского льда формулируется в терминах неизвестных, имеющих скалярную, векторную и тензорную структуру: переменные состояния (сплоченность, масса, толщина), скорость льда, внутренние напряжения. Система уравнений динамики замыкается уравнениями сохранения массы льда и реологическим законом, который определяет вид внутренних напряжений. Лед, приводимый в движение ветром и океаническим течением, отвечает на воздействие своей инерцией и внутренним трением. Динамика морского льда неразрывно связана с его термодинамикой, так как замерзание увеличивает его толщину, а таяние уменьшает. В свою очередь, динамика влияет на термодинамику за счет переноса полей массы.

На данный момент для глобального моделирования наиболее распространены модели гранулированной среды с вязко-пластичной реологией Хиблера<sup>4</sup>, построенные на прямоугольных и треугольных сетках. В зависимости от способа расположения локальных степеней свободы на элементах сетки (разнесения переменных) выделяются четыре типа прямоугольных и три типа треугольных сеток, представленные на рис. 1.

---

<sup>1</sup>Johannessen, O. et al, Remote Sensing of Sea Ice in the Northern Sea Route: Studies and Applications // Springer – Jan 2007

<sup>2</sup>Ovsienko, S. et al, Study and modelling of behaviour and spreading of oil in cold water and in ice conditions // Proceedings of 15th Conference on Port and Ocean Engineering under Arctic Conditions – 1999

<sup>3</sup>Manabe, S. et al // Sensitivity of a global climate model to an increase of CO<sub>2</sub> concentration in the atmosphere. // J. Geophys. Res., 85 – 1980

<sup>4</sup>Hibler, W. D., A Dynamic Thermodynamic Sea Ice Model // Journal of Physical Oceanography – 1979 – vol. 9, №4 – p.815-846

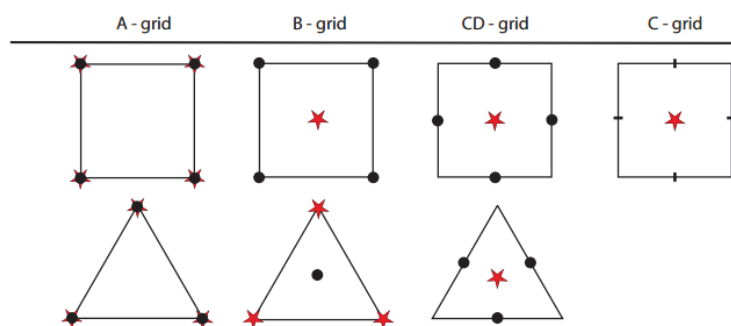


Рис. 1 — Разнесение скалярных и векторных степеней свободы на треугольных и прямоугольных сетках. Здесь "звездой" выделены скалярные, "кругом" — векторные, а "чертой" — разнесенные векторные степени свободы.

Среди крупнейших мировых моделей, в которых присутствует блок морского льда, можно выделить следующие: CICE<sup>5</sup>, MITgcm<sup>6</sup>, FESIM<sup>7</sup>, ICON<sup>8</sup> и LIM3<sup>9</sup>. В таблице 1 собраны основные характеристики динамических ядер зарубежных моделей: тип сетки, тип разнесения переменных, пространственная аппроксимация (FD, FV, FE - конечные разности, объемы, элементы соответственно), решатель уравнения баланса импульса, схема переноса скаляров.

Таблица 1 — Основные характеристики блоков динамики морского льда передовых зарубежных моделей.

Модель	Сетка	Разнесение	Аппрокс.	Импульс	Адвекция
CICE	□	B	FE	Picard	Remapping
MITgcm	□	C	FD, FV	Newton	FV + limiter
LIM3	□	B, C	FD	mEVP	CN+diffusion
FESIM	△	A, B, CD	FE, FV	mEVP	TG2+FCT, Upwind
ICON	△	CD	FE	mEVP	Upwind

Среди отечественных моделей можно выделить две, которые разрабатываются в ИВМ РАН. Совместная конечно-элементная модель океана и морского льда ФЕМОА<sup>10</sup> разработана Н. Г. Яковлевым. Она реализована на структурированной треугольной сетке (сетка состоит из прямоугольников, разделенных

<sup>5</sup>Rae, J. G. et al, Development of the Global Sea Ice 6.0 CICE configuration for the Met Office Global Coupled model // Geoscientific Model Development – 2015 – vol.8, № 7

<sup>6</sup><https://mitgcm.readthedocs.io/en/>

<sup>7</sup>Danilov, S., et al, Finite-Element Sea Ice Model (FESIM), version 2 // Geoscientific Model Development – 2015 – vol.8

<sup>8</sup>Mehlmann, C., et al // Discretization of Sea Ice Dynamics in the Tangent Plane to the Sphere by a CD-Grid-Type Finite Element – 2022 – vol.14, № 12

<sup>9</sup>Rousset, C., et al, The Louvain-La-Neuve sea ice model LIM3.6: global and regional capabilities // Geoscientific Model Development – 2015 – vol.8

<sup>10</sup>Iakovlev, N., On the calculation of large-scale ocean currents in the "velocity-pressure" variables by the finite element method // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling – 1996 – vol.11

диагональю на треугольники) типа "А" и использует стандартные конечно-элементные приближения линейными базисными функциями Куранта. В качестве схемы по времени для уравнения импульса используется устаревший EVP подход. Также ледовый блок присутствует в океанической компоненте климатической модели ИВМ РАН INMCM<sup>11</sup>. Реализован простейший конечно-разностный подход на прямоугольной сетке типа "С" в связке с EVP-решателем уравнения баланса импульса.

Широко распространены два пакета, включающие в себя численные решатели уравнения термодинамики морского льда: IcePack<sup>12</sup> и SI3<sup>13</sup>. Пакет Icespack представляет собой набор модулей, реализующих численное решение одномерного уравнения диффузии тепла с подвижной границей, с учетом следующих процессов: образование торосов, дренаж солености, биогеохимия, изменение занимаемой площади и толщины льда. Пакет SI3 входит в европейскую океаническую модель NEMO. Аналогично IcePack, SI3 включает в себя, сохраняющий энтальпию, одномерный решатель уравнения диффузии с подвижной границей и учетом солености. Также этот пакет отвечает за перераспределение льда по градициям и сборку суммарной одномерной сеточной энтальпии в ледовом блоке модели NEMO.

Таким образом, в мире существует несколько подходов к численному решению уравнений динамики и термодинамики морского льда, на основе которых построено множество моделей, использующихся для оперативного прогноза и моделирования климата. Однако спектр отечественных ледяных моделей не так широк. Одной из актуальных задач на данный момент является разработка универсальных, независимых и хорошо масштабируемых ледяных моделей, способных работать как в режиме сверхвысокого разрешения (шаг сетки порядка километра) для целей оперативного прогноза, так и на сетке грубого разрешения (порядка десятка/сотни километров) для проведения долгосрочных климатических расчетов. Для реализации этих моделей предлагается по возможности использовать перспективные отечественные программные пакеты.

**Целью** диссертационной работы является разработка и реализация численной модели динамики и термодинамики морского льда (и снега на нем) мирового уровня на основе современных вычислительных технологий.

Для достижения поставленной цели рассматривается вопрос построения широкого спектра схем двумерной адвекции на треугольной сетке с различным видом разнесения переменных, вопрос разработки современных параллельных решателей двумерного уравнения баланса импульса морского льда с вязко-пластичной реологией, а также вопрос создания эффективного одномерного решателя уравнения теплопроводности с подвижными границами, который

---

<sup>11</sup>Volodin, E. et al, Simulation of the present-day climate with the climate model INMCM5 //Climate Dynamics – 2017 – vol.49

<sup>12</sup><https://climatemodeling.science.energy.gov/technical-highlights/icepack-essential-physics-sea-ice-models>

<sup>13</sup>Aksenov, Y., et al, Sea Ice modelling Integrated Initiative (SI<sup>3</sup>) – The NEMO sea ice engine //Scientific Notes of Climate Modelling Center – 2019

учитывает широкий спектр физических процессов. Предполагается, что предложенные численные методы и их реализации будут использованы в новой перспективной модели климата, которая разрабатывается в ИВМ РАН.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Реализовать и оптимизировать широкий спектр точных, экономичных и масштабируемых схем двумерной адвекции на треугольной сетке с различным разнесением переменных, способных работать на произвольной кусочно-гладкой двумерной поверхности.
2. Реализовать и оптимизировать масштабируемый алгоритм численного решения уравнения баланса импульса морского льда с вязко-пластичной реологией, построенный на треугольной сетке с различным разнесением переменных, также способный работать на произвольной кусочно-гладкой двумерной поверхности.
3. Разработать и реализовать универсальный неявный численный метод решения нелинейного одномерного уравнения диффузии энтальпии морского льда с возможностью учета различных физических процессов как независимый программный пакет.

**В работе используются следующие методы и подходы:** теория и методы вычислительной математики для решения дифференциальных уравнений в частных производных; конечно-элементные, конечно-разностные и конечно-объемные методы пространственной аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных; численные эксперименты в рамках модельных задач, а также эксперименты с реалистичным внешним воздействием; современные инструменты для построения вычислительных сеток (Ani-2D/Ani-3D), разработки и распараллеливания программ (INMOST).

**Научная новизна заключается в том, что впервые:**

1. Существенно расширен спектр применяемых схем двумерной адвекции для переноса скалярных характеристик в задаче динамики морского льда на треугольных сетках типа "A" и "CD".
2. Предложена двухшаговая оптимизация схемы по времени Тейлора-Галеркина для задачи адвекции на треугольной сетке типа "A", которая в 2 раза сокращает время переноса при незначительной потере в точности.
3. Предложен алгоритм построения триангуляции Арктического региона со сгущением в области с потенциально высокой сплоченностью морского льда, узких проливов и бухт, построенный на основе данных береговой линии и реализованный с помощью современных отечественных программных пакетов.
4. Предложен локально-декартов подход для численного решения системы уравнений динамики морского льда, который позволяет избавиться от использования сферической метрики с особенностью на полюсе.
5. Предложен итерационный численный метод решения нелинейного одномерного уравнения теплопроводности морского/пресного льда со



снегом с подвижной границей, одновременно обновляющий одномерный профиль и значения поверхностных температур, согласованных с нелинейными граничными условиями, который в случае сходимости соответствует неявной временной схеме.

**Теоретическая значимость.** В работе показана применимость схем высокого порядка по времени типа Тейлора-Галеркина на треугольной сетке типа "А" для задачи адвекции морского льда, в связке с конечно-элементной пространственной аппроксимацией линейными на треугольнике базисными функциями Куранта. Впервые предложено использовать схему MUST для конечно-объемной адвекции на треугольной сетке типа "CD" в динамическом ядре модели морского льда. Предложена реализация описанных схем адвекции с использованием парадигмы локально-декартового базиса, которая подразумевает перевод компонент скорости в базис соседнего элемента треугольной сетки при сборке локального вектора правой части на треугольнике. Проведено численное исследование точности, сходимости, монотонности и консервативности предложенных реализаций. Локально-декартова парадигма адаптирована для реализации численного решения уравнения баланса импульса, которая также подразумевает перевод компонент скорости и тензора деформации в базис соседнего элемента. На результатах численных экспериментов показана универсальность данного подхода для расчетов на двумерной поверхности произвольной геометрии. Предложен итерационный метод релаксации с одновременным пересчетом граничных температур для задачи одномерной диффузии тепла с подвижной границей, который соответствует неявной схеме. Показана сходимость метода в конфигурации с искусственным и реалистичным внешним воздействием.

**Практическая значимость.** Разработан программный комплекс, реализующий предложенные схемы по времени и пространству. Продемонстрирована возможность краткосрочного прогноза состояния морского льда - скорость дрейфа, сплоченность и толщина - в Северном Ледовитом океане с реалистичным атмосферным и океаническим внешним воздействием.

Проведена подробная профилировка написанного кода и проверена масштабируемость отдельных блоков решателя уравнения адвекции и баланса импульса, на основе которых можно подобрать оптимальную конфигурацию модели для реальных расчетов.

На основе разработанного численного метода для решения уравнения диффузии тепла реализованы универсальные одномерная и нульмерная модели термодинамики пресного/морского льда со снегом. Проведена валидация кода на данных полевого эксперимента, которая показала хороший результат прогноза профиля температур и толщины одномерной модели в результате моделирования на длительный промежуток времени. Проведено качественное и количественное сравнение результатов предсказаний разработанной одномерной и нульмерной модели термодинамики на основе которого был сделан вывод, что нульмерная модель хорошо предсказывает поверхностную температуру, однако дает существенную ошибку в толщине льда по сравнению с одномерной.

## **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Метод повышения порядка схемы по времени для уравнения двумерной адвекции за счет применения многошаговых схем Тейлора-Галеркина на треугольной сетке типа "А" и метод повышения порядка аппроксимации по пространству за счет реализации схемы MUST на сетке типа "CD" в рамках модели динамики морского льда;
2. Метод оптимизация вычислительной сложности шага двумерной адвекции за счет применения двухшаговой схемы Тейлора-Галеркина на треугольной сетке типа "А".
3. Алгоритм построения треугольной сетки Арктического бассейна, включающий в себя процессы сгрубления данных береговой линии и сгущения сетки в область с потенциально высокой сплоченностью морского льда, реализованный с помощью передовых отечественных программных пакетов построения триангуляций.
4. Метод адаптации локально-декартового подхода для получения численного решения уравнения баланса импульса морского льда с вязкопластичной реологией на треугольных сетках типа "А" и "CD".
5. Итерационный численный метод решения нелинейного одномерного уравнения диффузии тепла с подвижной границей, одновременно обновляющий профиль и граничные значения температур, которые согласованы с нелинейным граничным условием произвольного типа.

**Достоверность** результатов, полученных в диссертации, обоснована всесторонним аналитическим и численным исследованием предложенных методов и подходов на тестовых задачах, включающих в себя численные эксперименты с искусственным и реалистичным внешним воздействием, как для уравнений двумерной динамики, так и для задачи одномерной термодинамики морского льда, сравнением результатов работы с ведущими мировыми моделями. Материал, изложенный в диссертации, опирается на широкий список научной литературы, посвященный рассматриваемым методам и их аналогам.

**Апробация работы.** Автор лично докладывал основные результаты работы на следующих международных и российских конференциях, рабочих семинарах: 61-я, 62-я, 63-я и 65-я научные конференции МФТИ, Москва, Россия, 2018-2023; "Конференция международных математических центров мирового уровня", Сочи, Россия, 2021; "Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии", Нижний Новгород, Россия, 2020 (онлайн) - по результатам конференции была получена премия за лучший доклад; "CITES-2021", 2021, "CITES-2023", 2023, Москва, Россия; "ENVIROMIS-2022", 2022, Томск, Россия; Summer school "Mathematics for Climate and the Environment", Каржез, Корсика, Франция, 2019; Семинар "Математическое моделирование геофизических процессов: прямые и обратные задачи" Москва, Россия, 2021; Рабочий семинар "Новые математические методы и технологии в актуальных задачах геофизики" (апрель, 2021; апрель, 2022; май, 2022), Москва, Россия; "Молодежная конференция Отделения Московского центра фундаментальной и прикладной математики



в ИВМ РАН”, Москва, Россия (декабрь, 2020; декабрь, 2021; декабрь 2022); ”Аспирантский семинар в ИВМ РАН”, Москва, Россия (2021, дважды в 2022 и 2023 годах).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 11 работ [1; 5; 6; 2; 7; 8; 3; 4; 9—11]. Основные результаты опубликованы в работах [1—4], которые входят в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени кандидата наук. 3 работы [2—4] входят в системы цитирования Web of Science и Scopus. Также по результатам исследований зарегистрированы 2 программы для ЭВМ [12; 13].

**Личный вклад.** В работе [1] автором описан алгоритм построения триангуляции Арктического региона со сгущением и представлена система параллельной интерполяции геоданных на модельную сетку. В работе [3] вклад автора относится к реализации широкого класса параллельных схем переноса на треугольной сетке типа ”А”, их тестирование на консервативность, квазимонотонность, а также сравнение ошибок схем разного порядка по времени. В работе [2] вклад автора заключается в реализации идеи построения численного решателя уравнения переноса и баланса импульса морского льда в локально-декартовом базисе, описании набора используемых схем переноса на сетке типа ”CD”, проведении тестовых расчетов деформации льда в конфигурации с искусственным внешним воздействием, а также описании построения системы прогноза дрейфа морского льда в Арктическом бассейне с использованием ”А”-версии разработанной модели. В работе [4] вклад автора заключается в предложении и реализации итерационного процесса одновременного расчета профиля и значений поверхностных температур в задаче диффузии тепла с подвижной границей, а также валидации разработанного кода в численном эксперименте с искусственным и реалистичным внешним воздействием.

**Объем и структура диссертационной работы.** Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и 1 приложения. Полный объем диссертации составляет 142 страницы, включая 51 рисунок и 6 таблиц. Список литературы содержит 110 наименований.

Автор выражает благодарность сотрудникам ИВМ РАН и, в частности, М.А. Толстых за ценные замечания к диссертационной работе. Работа поддержана грантом РНФ (21-71-30023) и Московским центром фундаментальной и прикладной математики (Соглашение с Минобрнауки России № 75-15-2022-286).

## Основное содержание работы

Во **введении** приводится обзор основных физических предположений, на которых основаны современные модели морского льда, формулируются особенности численной реализации передовых зарубежных и отечественных моделей, формулируется цель работы и ставятся задачи, необходимые для её достижения.

Излагается теоретическая и практическая значимость работы, подчеркивается научная новизна и формулируются положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** работы посвящена построению схем переноса скаляров на треугольных сетках с двумя типами разнесения переменных: "А" и "CD".

В разделе 1.1 формулируются основные требования к качественной схеме, для решения однородного уравнения переноса

$$\partial_t m + \nabla \cdot (m\mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

на произвольной двумерной поверхности в контексте поставленной задачи динамики морского льда: высокий порядок аппроксимации по времени и пространству, квазимонотонность, глобальная консервативность, безальтернативность явных схем, эффективность параллельной реализации.

В разделе 1.2 вводятся основные финитные базисные функции: функция Куранта, элемент Круэзе-Равиар, а также постоянная на треугольнике функция. Они представлены на рис. 2. На треугольной сетке типа "А" базисная функция Куранта используется как для аппроксимации скалярных, так и для компонент векторных степеней свободы. На "CD"-сетке для аппроксимации скаляров используется постоянная на треугольнике функция, а для векторов - конечный элемент Круэзе-Равиар.

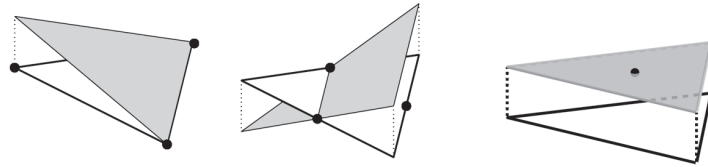


Рис. 2 — Базисные функции на треугольнике: базисная функция Куранта  $\varphi_i$  (слева), базисная функция Круэзе-Равиар  $\psi_i$  (в центре), постоянная на треугольнике базисная функция  $\kappa_i$  (справа).

В разделе 1.3 вводится локально-элементный декартов базис на каждом элементе сетки (вершина, ребро, треугольник), представленный на рис. 3. Обсуждается процесс сборки матриц перехода для компонент векторов/тензоров при замене элементного базиса на соседний.

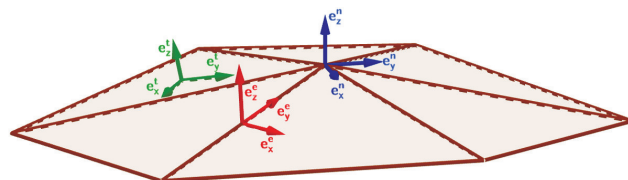


Рис. 3 — Ортонормированные элементные базисы. Синий цвет — вершинный базис, красный цвет — реберный базис, зеленый цвет — треугольный базис.

Раздел 1.4 посвящен описанию построения численного решения однородного уравнения переноса (1) на сетке типа "А". Объясняется выбор семейства

схем по времени типа Тейлора-Галеркина. Отмечается, что внедрение двухшаговых схем 2-го, 3-го и 4-го порядка не является распространенной практикой и их реализация в ледовом блоке была предложена в данной работе **впервые**.

В подразделе 1.4.1 вводится семейство схем типа Тейлора-Галеркина. Классическая одношаговая схема второго порядка (**TG2**) имеет вид

$$m^{n+1} = m^n - \Delta t \nabla \cdot (m^n \mathbf{u}) + \frac{\Delta t^2}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u} \nabla \cdot (m^n \mathbf{u})). \quad (2)$$

Также предлагается использовать двухшаговый аналог (**TTG2**) описанной схемы

$$m^{n+\frac{1}{2}} = m^n - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot (m^n \mathbf{u}), \quad m^{n+1} = m^n - \Delta t \nabla \cdot (m^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{u}). \quad (3)$$

Предлагается расширить класс схем по времени, двухшаговой схемой 3-го (**TTG3**) и 4-го (**TTG4**) порядка точности по времени.

В подразделе 1.4.2 рассматривается вопрос пространственной аппроксимации на примере схемы TG2. Для сборки локального вектора правой части применяется отображение треугольника в стандартный, приводится сверточный вид вычисления интеграла на треугольнике. Показано, что для сборки правой части с использованием слагаемого порядка  $\Delta t$  требуется 55 операций умножения, а в случае сборки с членом  $\Delta t^2$  - 325.

В подразделе 1.4.3 описывается технология конечно-элементной коррекции потоков, которая избавляет численное решение от осцилляций, возникающих из-за эффекта Гиббса.

Раздел 1.5 посвящен описанию построения схем переноса на треугольной сетке типа "CD". Отмечается, что конечно-элементная аппроксимация приводит к стандартной полудискретной конечно-объемной формулировке

$$|T_i| \frac{\partial m}{\partial t} = -R_i, \quad R_i = \sum_{E_j \text{ adj to } T_i} F_j, \quad F_j = U_j m_j, \quad (4)$$

где  $F_j$  — поток скаляра в треугольник  $T_i$  из ребра  $E_j$ ,  $U_j$  — интеграл по ребру  $E_j$  нормальной компоненты скорости,  $m_j$  — значение скаляра в середине ребра  $E_j$ .

В подразделе 1.5.1 вводится семейство явных многошаговых схем Рунге-Кутты произвольного порядка по времени, которые реализованы в рамках "CD"-версии модели.

Подраздел 1.5.2 посвящен пространственной аппроксимации полученной конечно-объемной схемы (4). Показано, что приближение реберного значения скаляра, значением в треугольнике против потока скорости соответствует стандартной "upwind"-схеме (**FOU** - first order upwind). Для повышения порядка пространственной аппроксимации предлагается использовать приближение первого порядка для оценки реберного значения скаляра

$$m(x, y) = m(x_c, y_c) + \nabla m_c \cdot \Delta \mathbf{r} + O(\Delta \mathbf{r}^2), \quad (5)$$

где  $(x_c, y_c)$  координаты барицентра треугольника, а  $\Delta \mathbf{r}$  вектор направленный из барицентра треугольника в середину ребра. Описывается идея схемы **MUST**, которая соответствует приближению градиента в (5) методом конечных разностей, а также идея схемы **MUSCL**, которая заключается в приближении градиента с помощью формулы Гаусса. Отмечается, что оба подхода нуждаются в применении управляющей функции для обеспечения квазимонотонности схемы.

В разделе 1.6 представлены результаты численных экспериментов переноса на сфере. В подразделе 1.6.1 описываются начальные распределения скаляров, а также вид аналитических реверсивных потоков скорости. В подразделе 1.6.2.1 представлены результаты сходимости схем при уменьшении шага сетки, которые проиллюстрированы на рис. 4. В подразделе 1.6.2.2 исследована интегральная ошибка схем на диапазоне устойчивости чисел Куранта. В подразделе 1.6.2.3 демонстрируется положительность и монотонность реализованных схем при переносе дивергентным полем скорости.

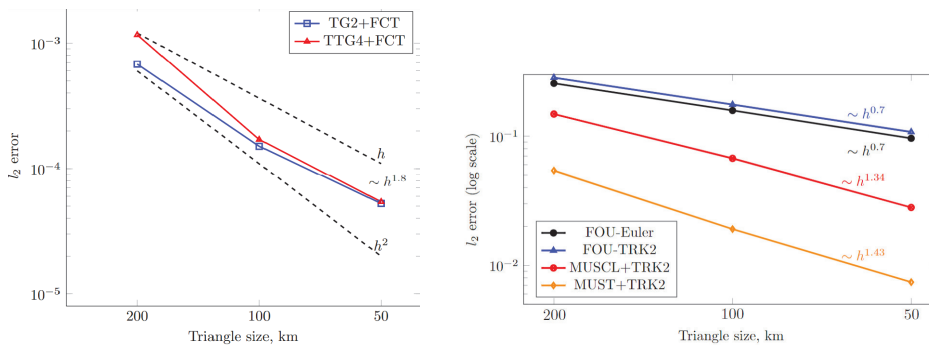


Рис. 4 — Убывание ошибки схем переноса при уменьшении размера треугольника. Слева - схемы на "А"-сетке, справа - схемы на "CD"-сетке.

Подраздел 1.6.3 посвящен профилировке последовательного и масштабируемости параллельного кода. В таблице 2 показано время исполнения последовательной программы, реализующей схемы переноса на "А"-сетке, а в таблице 3 - на "CD"-сетке. Отмечается, что применение схемы TTG2 почти в 2 раза уменьшает время вычислений по сравнению с TG2. Также приводится график

Таблица 2 — Время работы шага адвекции на "А"-сетке в мс.

-	TG2+FCT	TTG2+FCT	TTG3+FCT	TTG4+FCT
сборка правой части	425	260	785	789
решение СЛАУ	6	11	11	11
коррекция потоков	95	93	94	93
суммарное время	526	364	890	893

ускорения параллельной программы вплоть до 256 вычислительных ядер и делается вывод о линейной масштабируемости написанного кода.

Во второй главе обсуждается вопрос о численном решении уравнения баланса импульса. "А"-версия модели во многом повторяет численный метод,

Таблица 3 — Время работы шага схем адвекции на "CD"-сетке в мс.

-	FOU+Euler	MUSCL+TRK2	MUST+TRK2
сборка потоков	66	585	245
пересчет скаляров	4	8	8
суммарное время	70	593	253

реализованный в рамках немецкой модели FESIM<sup>14</sup>, а "CD"-версия кода больше всего похожа на ледовый блок модели ICON<sup>15</sup>.

В разделе 2.1 вводятся основные скалярные (сплоченность, толщина) и векторные (скорость) прогностические переменные. Формулируется закон сохранения импульса, который имеет вид

$$\rho_i h \partial_t \mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (6)$$

где  $h$  - сплоченность,  $\rho_i$  - плотность льда,  $\mathbf{u}$  - двумерный вектор скорости,  $\boldsymbol{\sigma}$  - тензор напряжений,  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  - вектор суммарной внешней силы, который включает в себя силу касательного трения ветра и воды, силу Кориолиса, а также горизонтальную силу, возникающую за счет неоднородности уровня океана. Система уравнений замыкается уравнениями переноса толщины и сплоченности (на сплоченность накладывается ограничение не превышения 1), которые выражают соответствующие законы сохранения.

В разделе 2.2 вводится понятие реологии морского льда, которое задает связь между компонентами тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и тензора скоростей деформации  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0.5(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ .

В разделе 2.3 формулируется вязко-пластичная реология Хиблера<sup>16</sup>

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + (\xi - \eta) \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \mathbf{I} - 0.5 P \mathbf{I}, \quad (7)$$

где  $\xi, \eta$  — коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости,  $P$  — прочность льда,  $\mathbf{I}$  — двумерный единичный тензор. Согласно Хиблеру, прочность (давление) льда параметризуется как  $P = p^* h \exp(-C(1 - a))$  с эмпирической константой  $p^*$  ( $\text{H} \cdot \text{м}^{-2}$ ) и коэффициентом  $C$ . Коэффициент  $C$  подобран таким образом, чтобы прочность льда  $P$  становилась пренебрежимо малой в случае разреженного льда ( $a < 0.8$ ). При этом объемная и сдвиговая вязкости зависят от прочности льда  $P$  и полной деформации  $\Delta$  следующим образом

$$\xi = \frac{P}{2\Delta}, \quad \eta = \frac{\xi}{e^2}, \quad \Delta = \left( \dot{\epsilon}_d^2 + \frac{1}{e^2} \dot{\epsilon}_s^2 \right)^{1/2}. \quad (8)$$

<sup>14</sup>Danilov, S. et al, Finite-Element Sea Ice Model (FESIM), version 2 // Geoscientific Model Development – 2015 – vol. 8, №6 – p.1747-1761

<sup>15</sup>Mehlmann, C. and Korn, P., Sea-ice dynamics on triangular grids // Journal of Computational Physics – 2021 – vol. 428

<sup>16</sup>Hibler, W. D., A Dynamic Thermodynamic Sea Ice Model // Journal of Physical Oceanography – 1979 – vol. 9, №4 – p.815-846



Здесь  $e = 2$  - эксцентриситет эллиптической кривой текучести,  $\dot{\epsilon}_d = \text{tr}(\dot{\epsilon}) = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}$  - дивергентная часть тензора скоростей деформации,  $\dot{\epsilon}_s = ((\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22})^2 + 4\dot{\epsilon}_{12}^2)^{1/2}$  - сдвиговая часть тензора скоростей деформации.

В разделе 2.4 приводится обзор методов дискретизации по времени уравнения баланса импульса, наиболее часто встречающихся в современных моделях: метод Пикара, метод Крылова-Ньютона с приближением Якобиана, эволюционные подходы типа EVP и mEVP. Отмечается, что на данный момент эволюционные подходы лучше всего масштабируются на компьютере с параллельной архитектурой, поэтому в рамках разработанной модели используются именно они.

В подразделе 2.4.1 вводится EVP-метод<sup>17</sup> дискретизации по времени уравнения импульса, который основан на использовании эволюционной упруго-вязко-пластичной реологии. В подразделе 2.4.2 вводится слабая постановка mEVP-метода<sup>18</sup>, который построен на основе модифицированного EVP-подхода с отсутствием привязки к физическому времени. Вводя двумерную тестовую функцию  $\bar{\mathbf{u}}$ , пересчет компонент скорости записывается в виде

$$\left( \beta \frac{\rho_i h}{\Delta t} (\mathbf{u}^{p+1} - \mathbf{u}^p), \bar{\mathbf{u}} \right) + \left( \frac{\rho_i h}{\Delta t} (\mathbf{u}^p - \mathbf{u}^n), \bar{\mathbf{u}} \right) = - \left( \boldsymbol{\sigma}^{p+1}, \nabla \bar{\mathbf{u}} \right) + \left( \mathbf{F}_{\text{ext}}^{p+1}, \bar{\mathbf{u}} \right). \quad (9)$$

Здесь  $(f_1, f_2) = \int_{\Omega} f_1 f_2 dS$  скалярное произведение в  $L_2$ . Пересчет компонент тензора напряжений записывается в виде

$$\alpha (\sigma_1^{p+1} - \sigma_1^p) = \frac{P}{\Delta p} (\dot{\epsilon}_1^p - \Delta^p) - \sigma_1^p, \quad \alpha (\sigma_{2/12}^{p+1} - \sigma_{2/12}^p) = \frac{P}{e^2 \Delta p} \dot{\epsilon}_{2/12}^p - \sigma_{2/12}^p. \quad (10)$$

В (9), (10)  $\alpha$  и  $\beta$  - априорно заданные константы порядка  $10^2 - 10^3$ , а произведение  $\alpha \cdot \beta$  должно быть достаточно большим для устойчивости<sup>19</sup>. В случае сходимости итерационного процесса (9), (10) достигается стандартная формулировка уравнения баланса импульса (6) с вязко-пластичной реологией (7).

В разделе 2.5 проводится пространственная дискретизация mEVP-метода на треугольной сетке типа "А". Скалярные величины (толщина, сплоченность) берутся как весовые коэффициенты в узлах для сохранения функций второго порядка под знаком интеграла, что в месте с использованием диагонализированной массовой матрицы существенно ускоряет вычисления. Приводится алгоритм псевдоитераций одного глобального шага по времени.

<sup>17</sup>Hunke, E. and Dukowicz, John An Elastic Viscous Plastic Model for Sea Ice Dynamics // Journal of Physical Oceanography – 1997 – vol. 27

<sup>18</sup>Bouillon, S et al, The elastic–viscous–plastic method revisited // Ocean Modelling – 2013 – vol. 71 – p. 2-12

<sup>19</sup>Kimmritz, M. et al, On the convergence of the modified elastic–viscous–plastic method for solving the sea ice momentum equation // Journal of Computational Physics – 2015 – vol. 296 – p.90-100



В подразделах 2.5.2 и 2.5.3 обсуждается вопрос организации вычислений компонент тензора скоростей деформации и сборки вектора дискретной внутренней силы с применением локально-декартового подхода.

В разделе 2.6 рассматривается вопрос пространственной дискретизации на треугольной сетке типа "CD", который в целом аналогичен дискретизации на сетке типа "A", за исключением отсутствия необходимости лампирования массовой матрицы, в следствие ортогональности элементов Круэзе-Равиар.

В подразделе 2.6.1 дается обзор литературы на тему стабилизации "CD"-решения. Вводится вид стабилизационного слагаемого, добавляемого в правую часть (9)

$$S_i = 2.0 \cdot \alpha_{st} \sum_{E_k \text{ adj to } E_i} \frac{\xi_k}{|E_k|} \int_{E_k} [u_h^p]_{E_k} [\psi_i]_{E_k} dl. \quad (11)$$

Здесь  $[\cdot]_E$  - скачок функции вдоль ребра,  $u_h$  - компонента дискретной скорости,  $\psi_i$  - базисная функция. Параметр  $\alpha_{st}$  позволяет контролировать количество добавляемой стабилизации (в модели используется значение  $\alpha_{st} = 1$ ).

В подразделе 2.6.2 выводится дискретный вид стабилизационного слагаемого, который во многом похож на дискретный лапласиан, "штрафующий скорость" за разрыв вдоль ребра. Предлагается альтернативный "более гладкий" вид коэффициента стабилизации.

Раздел 2.7 посвящен численным экспериментам. Рассматривается три тестовых запуска с искусственным внешним воздействием: эксперимент, реализующий область высокой деформации на плоском квадрате; аналогичный эксперимент на поверхности сферы; модельная задача воспроизведения линейных кинематических особенностей (ЛКО). Демонстрируются расчет задачи краткосрочного прогноза дрейфа Арктического льда с реалистичным форсингом.

В подразделе 2.7.1 представлены результаты расчетов теста "высокой деформации". Делается вывод о необходимости стабилизации решения на сетке с разнесением типа "CD".

В подразделе 2.7.2 представлены результаты моделирования в аналогичном эксперименте на поверхности сферы.

В подразделе 2.7.3 формулируется искусственное внешнее воздействие для задачи модельного воспроизведения ЛКО в квадратной области. Результаты моделирования на "A"-сетке представлены на рис. 5. Видно, что разрешение ЛКО существенно увеличивается с повышением пространственного разрешения. На рис. 6 показаны результаты моделирования на сетке типа "CD". Качественное сравнение результатов с сеткой типа "A" показывает, что в случае "CD" разнесения переменных ЛКО проявляются более явно, что связано с большим количеством степеней свободы для скаляров и векторов на этой сетке.

Подраздел 2.7.4 посвящен описанию построения простейшей системы прогноза дрейфа морского льда в Арктическом регионе, которая состоит из построения триангуляции расчетной области со сгущением, реализации параллельной системы интерполяции геоданных на модельную сетку и запуска

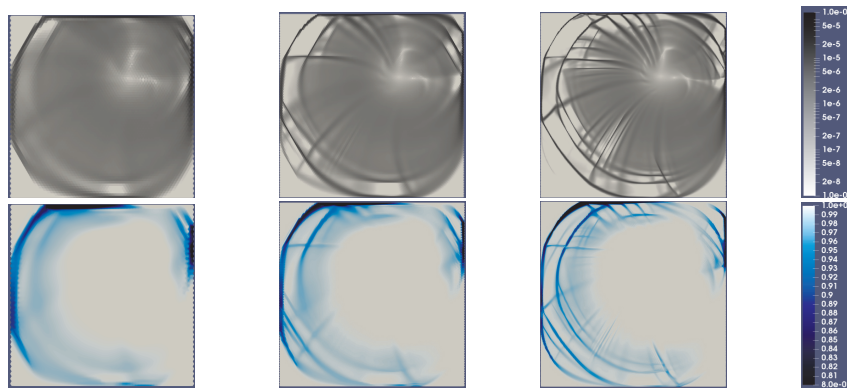


Рис. 5 — Тест 3 для сетки типа А. Деформация сдвига  $\dot{\epsilon}_s$  в логарифмическом масштабе - верхняя строка, сплоченность  $a$  - нижняя строка. Левый столбец - размер треугольника 8 км, центральный - 4 км, правый - 2 км.

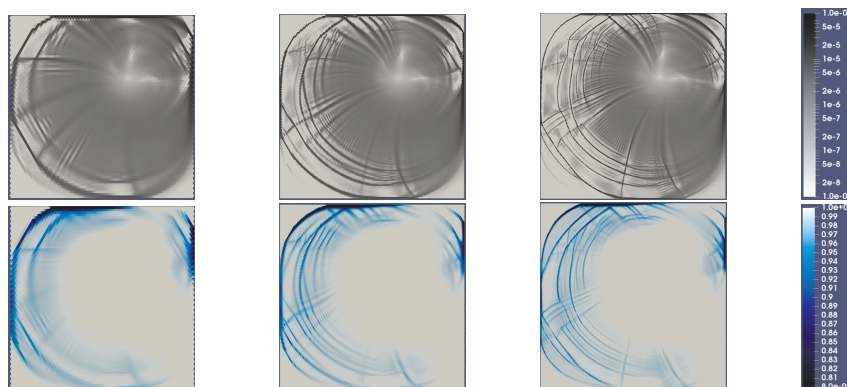


Рис. 6 — Тест 3 для сетки типа CD. Деформация сдвига  $\dot{\epsilon}_s$  в логарифмическом масштабе - верхняя строка, сплоченность  $a$  - нижняя строка. Левый столбец - размер треугольника 8 км, центральный - 4 км, правый - 2 км.

тестового расчета на короткий промежуток времени. В качестве динамического ядра используется "А"-версия модели.

В подразделе 2.7.4.1 приводится авторский алгоритм сгрубления данных береговой линии, описывается процесс построения равномерной и сгущенной триангуляции Арктического бассейна с помощью отечественной библиотеки Ani2D. Полученный результат представлен на рис. 7. Конечные характеристики построенной сетки: минимальный размер треугольника составляет  $\approx 11$  км, максимальный  $\approx 60$  км, сетка состоит из 329'670 вершин, 642'387 треугольников и 17'049 граничных ребер.

Подраздел 2.7.4.2 посвящен описанию алгоритма параллельной интерполяции геоданных на построенную модельную сетку. Основные океанические характеристики (скорость воды, уровень океана, начальная сплоченность льда) берутся из свободно распространяемых данных системы Европейского прогноза Арктического региона TOPAZ4<sup>20</sup>. Скорость ветра берется из данных реанализа CAMS<sup>21</sup>.

<sup>20</sup>Sakov, P. et al, TOPAZ4: an ocean-sea ice data assimilation system for the North Atlantic and Arctic // Ocean Science – 2012 – vol. 8, № 4 – p. 633-656

<sup>21</sup>Peuch, V.-H. et al, The Copernicus Atmosphere Monitoring Service: From Research to Operations // Bulletin of the American Meteorological Society – 2022 – vol.103, №12 – p. 2650 - 2668



Рис. 7 — Триангуляция Арктического региона со сгущением, построенная с помощью пакета Ani2D.

В подразделе 2.7.4.3 приводятся результаты краткосрочного двухнедельного расчета, представленные на рис. 8. Отмечается высокая разрешающая способность ЛКО, которая не наблюдается в системе TOPAZ4, что еще раз подчеркивает необходимость использования высокого пространственного разрешения для моделирования особенностей.

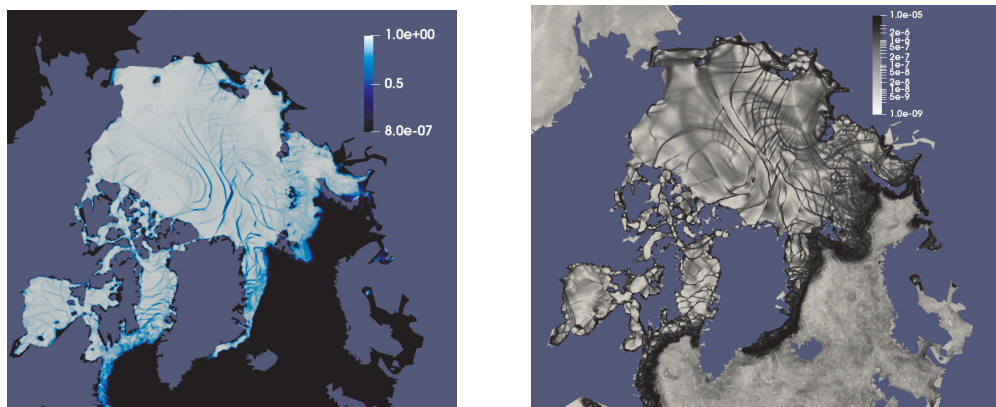


Рис. 8 — Результаты расчетов характеристик дрейфа льда в Арктическом регионе. Слева - сплоченность льда, справа - полная деформация  $\Delta$  в логарифмическом масштабе.

В подразделе 2.7.5 проводится профилировка последовательного исполнения блоков решателя уравнения импульса и проверяется масштабируемость параллельного кода. Результаты профилировки процедур блока импульса: вычисление тензора скоростей деформации (**EPS**), сборка вектора внутренней силы (**FORCE**), пересчет компонент скорости и напряжений (**VEL/SIG**), стабилизация (**STAB**); собраны в таблице 4. Отмечается, что суммарное время исполнения одного шага решателя импульса на "А"-сетке составляет примерно 9.5 секунд, в то время как на "CD"-сетке время последовательного исполнения составляет 21.5 секунду, что больше в 2 раза. Учитывая, что размер задачи по скоростям

Таблица 4 — Время работы одного шага по времени блоков mEVP-решателя в

	мс.			
-	EPS	FORCE	VEL/SIG	STAB
А-модель	2'892	6'108	558	-
CD-модель	2'725	6'231	1'980	9'809

на "CD"-сетке в 3 раза превышает размер на "А"-сетке, для достижения аналогичного разрешения необходимо использовать "А"-версию модели на сетке с разрешением в 3 раза выше, что отразится в троекратном увеличении времени исполнения. Подобные рассуждения демонстрируют перспективность подхода "CD"-моделирования с точки зрения оптимизации вычислений. Графики ускорения основных процедур блока импульса вплоть до 256 вычислительных ядер представлены на рис. 9. Наблюдается небольшое сублинейное ускорение, что

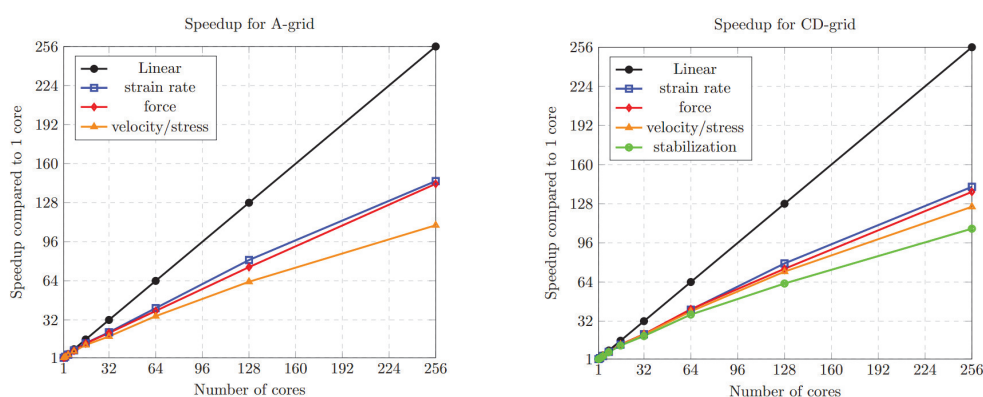


Рис. 9 — Ускорение работы отдельных блоков численного решения уравнения импульса. Слева - сетка типа А. Справа - сетка типа CD.

является приемлемым результатом для моделей подобного типа. Аналогичное ускорение присутствует в отечественной модели FEMAO<sup>22</sup>.

В третьей главе работы обсуждается вопрос разработки численного метода для задачи одномерной диффузии тепла с подвижной границей, на основе которого построена новая модель термодинамики морского льда со снегом.

В разделе 3.1 вводятся исходные уравнения задачи одномерной термодинамики морского льда со снегом.

В подразделе 3.1.1 формулируется одномерное уравнение диффузии тепла, которое выражает закон сохранения энтальпии льда  $E$

$$\rho \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_z = \rho c \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} + R \right), \quad (12)$$

где  $\rho$  - плотность,  $T$  - температура,  $c$  - теплоемкость,  $k$  - теплопроводность,  $R$  - количество коротковолновой радиации, проникающей в среду. Поскольку толщина льда не стационарна из-за процессов таяния и намерзания, уравнение (12) определяется в открытой подвижной области  $(z_b, z_{su})$ , где  $z_b$  и  $z_{su}$  -

<sup>22</sup>Perezhogin, P. et al, Advanced parallel implementation of the coupled ocean-ice model FEMAO (version 2.0) with load balancing //Geoscientific Model Development – 2021 – vol.14, №2 – p. 843–857



координаты нижней кромки и поверхности ледяного столба. Для объединения процессов диффузии и изменения толщины, вводится сигма-система координат. Сигма-координата определяется как  $\sigma = (z - z_b)/(z_{su} - z_b)$ . Уравнение (12) переписывается в виде

$$\rho \left( \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{\sigma} + \dot{\sigma} \frac{\partial E}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} + R \right). \quad (13)$$

Последнее равенство дополняется неразрывностью массы, которое выражается уравнением переноса виртуальной скоростью. Уравнение адвекции-диффузии в неподвижной сигма-области принимает конечный вид

$$\frac{\partial(\rho E \partial z / \partial \sigma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E \omega)}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} + R \right), \quad (14)$$

где  $\omega = \partial z / \partial \sigma \cdot \dot{\sigma}$  - поток массы, который является линейной функцией координаты  $\sigma$ .

В подразделе 3.1.2 формулируется общий вид граничного условия, которое выражает тепловой баланс на границе раздела

$$\left[ \rho L \omega = k \frac{\partial T}{\partial z} - F \right]_{z=z_b, z_{su}}, \quad (15)$$

где  $L$ - удельная теплота плавления,  $F$  - полный внешний атмосферный или океанический поток. Параметризация атмосферного потока является функцией поверхностной температуры и включает в себя: излучение льда, поток явного и скрытого тепла, коротковолновую и длинноволновую радиацию, поток тепла за счет остывания осадков. В случае присутствия снега на границе раздела "лед-снег" ставится условие непрерывности температуры и проводящего потока. Вводится вид проникающей радиации, который подчиняется закону Бугера-Ламберта-Бера.

В подразделе 3.1.3 вводится параметризация нелинейных коэффициентов теплоемкости, теплопроводности, энтальпии и теплоты плавления, которые являются функциями температуры и солёности льда. Сравниваются две параметризации теплопроводности: "параметризация солевых карманов" и "параметризация пузырькового рассола".

Раздел 3.2 посвящен дискретизации по пространству и времени.

В подразделе 3.2.1 сформулирована классическая дискретизация по времени VL99<sup>23</sup>, сохраняющая энтальпию. В качестве пространственной дискретизации адвективного слагаемого используется стандартная схема против потока, а для диффузионного слагаемого реализована схема центральных разностей второго порядка. Показано, что дискретизация приводит к системе уравнений с трехдиагональной матрицей, которая решается методом прогонки.

<sup>23</sup>Bitz, C. M. and Lipscomb, W. H., An energy-conserving thermodynamic model of sea ice // Journal of Geophysical Research: Oceans – 1999 – vol.107, №7

В подразделе 3.2.2 Обсуждается вопрос решения граничных условий, который сводится к одномерной задаче поиска нуля функции. Предлагается использовать метод секущих, либо метод Риддерса.

В подразделе 3.2.3 представлена совместная система линейных уравнений для льда и снега. Предлагается приводить ее к трехдиагональному виду с помощью метода исключения Гаусса, в случае аппроксимации проводящего потока на границе раздела вторым порядком точности. Формулируется предложенный автором итерационный процесс релаксации нелинейных коэффициентов с одновременным поиском граничных значений температуры.

В подразделе 3.2.4 описывается четыре режима работы модели: намерзание льда без снега, намерзание льда со снегом, таяние льда и таяние снега. Приводится псевдокод одного шага по времени, который использует четыре описанных режима.

В подразделе 3.2.5 приводится краткое описание нульмерной модели, которая строится в предположении нулевой теплоемкости льда, отсутствия проникающей радиации, и постоянной теплопроводности. Внутренняя логика блока нульмерной термодинамики повторяет одномерную реализацию.

Раздел 3.3 посвящен численным экспериментам. Одномерный и нульмерный блок сравниваются в задаче с искусственным внешним воздействием и на данных полевого эксперимента SHEBA.

В подразделе 3.3.1 задается периодический аналитический вид температуры атмосферы и скорости выпадения осадков. Временной ряд предсказанных температур и толщин льда представлен на рис. 10. Делается вывод о том, что

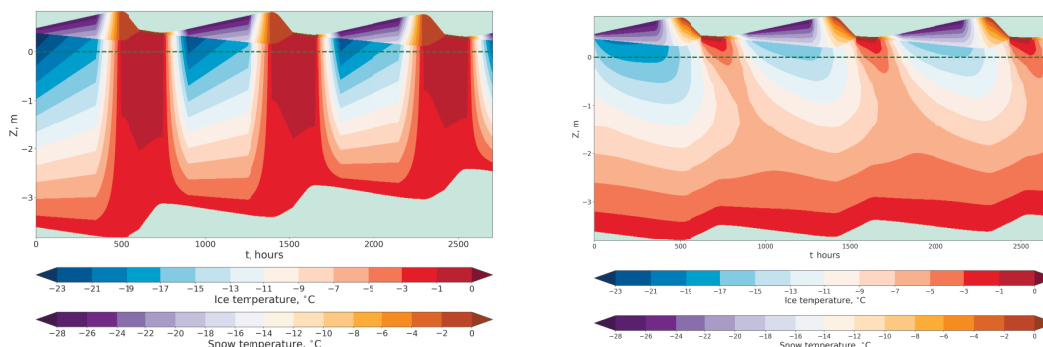


Рис. 10 — Эволюция профиля температуры для первого модельного эксперимента. 0D модель слева, 1D модель справа.

несмотря на существенные различия в профиле температур и толщин, предсказываемые температуры поверхности отличаются незначительно.

Подраздел 3.3.2 посвящен описанию данных измерений полевого эксперимента SHEBA<sup>24</sup>. Приводятся результаты моделирования с реалистичным внешним воздействием. Разницы измерений и результатов предсказаний одномерной и нульмерной модели показаны на рис. 11. Также демонстрируется сходимость

<sup>24</sup>Persson, O. et al, Measurements near the Atmospheric Surface Flux Group tower at SHEBA: Near-surface conditions and surface energy budget // Journal of Geophysical Research – 2002 – vol.107



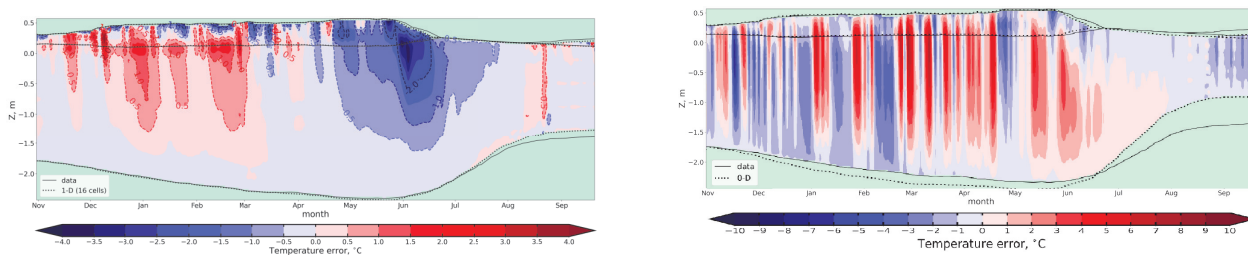


Рис. 11 — Слева - ошибка 1D модели с 16 ячейками во льду, справа - ошибка 0D модели. В качестве точного решения используются данные измерений SHEBA.

одномерного решения к данным измерений при увеличении пространственного разрешения. Демонстрируется ошибка предсказаний поверхностной температуры для 1D и 0D моделей. Делается вывод о том, что нульмерная модель дает существенную ошибку в толщине и мгновенном значении профиля температур, однако достаточно точно предсказывает поверхностную температуру.

## Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Реализован широкий класс схем переноса на треугольной сетке с разнесением переменных типа "A" и "CD". На сетке типа "A" предложено расширить набор стандартных схем типа Тейлора-Галеркина двухшаговыми вариациями 2-го, 3-го и 4-го порядка по времени. Показано, что схемы высокого порядка дают большую точность при числах Куранта, превышающих значение 0.7. Второй порядок аппроксимации по пространству на треугольной сетке типа "CD" был получен за счет приближения реберного значения скаляра, согласно схемам MUST и MUSCL. Точность таких схем значительно выше стандартной схемы против потока, однако с вычислительной точки зрения они более затратны.
2. Показано, что использование двухшаговой вариации схемы Тейлора-Галеркина второго порядка по времени приблизительно в 2 раза ускоряет вычисления при незначительной потере в точности, что является существенной оптимизацией динамического блока морского льда, в силу большого количества переносимых скаляров.
3. Предложен алгоритм построения триангуляции Арктического бассейна, использующий сгруппированные данные береговой линии базы данных GSHHG и отечественный триангулятор Ani2D. Реализовано сгущение триангуляции в области с потенциально высокой сплоченностью морского льда с использованием исторических спутниковых данных.
4. Блоки адвекции и импульса построены на основе локально-декартового подхода. Стандартные алгоритмы дополняются переводом компонент векторов и тензоров, что увеличивает их вычислительную сложность,

однако делает код универсальным для произвольной геометрии расчетной области.

5. Предложен новый итерационный метод для решения нелинейного одномерного уравнения термодинамики морского льда со снегом, который заключается в одновременном расчете профиля и поверхностных значений температур, согласованных с нелинейным граничным условием произвольного вида. На основе предложенного метода построены одномерная и нульмерная модель термодинамики морского льда со снегом. Результаты предсказаний этих моделей проверены на данных полевого эксперимента SHEVA. По результатам сравнения делается вывод, что нульмерная модель достаточно точно предсказывает температуру на верхней поверхности снега или льда, однако дает существенную ошибку в профиле температур и толщине льда, по сравнению с одномерной реализацией.

## **Публикации автора по теме диссертации**

### **Статьи в изданиях, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации**

1. *Петров, С.* Конечно-элементная модель динамики морского льда и ее параллельная реализация с использованием библиотеки INMOST / С. Петров // Проблемы информатики. — 2021. — Т. 1. — С. 36—48.
2. *Petrov, S. S.* SIMUG - Finite Element Model of Sea Ice Dynamics on Triangular Grid in Local Cartesian Basis / S. S. Petrov, N. G. Iakovlev // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2023. — Т. 38, № 3. — С. 145—160.
3. *Petrov, S. S.* The suite of Taylor–Galerkin class schemes for ice transport on sphere implemented by the INMOST package / S. S. Petrov, N. G. Iakovlev // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2021. — Т. 36, № 4. — С. 227—238.
4. *Petrov, S. S.* The new sea ice thermodynamics code for the INM RAS Earth System model: The design and comparison of one- and zero-dimensional approaches with the observational data / S. S. Petrov, V. K. Zyuzin, N. G. Iakovlev // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2023. — Т. 38, № 1. — С. 47—61.

### **Тезисы и сборники трудов конференций**

5. *Петров, С.* Методы суперкомпьютерного конечно-элементного моделирования динамики морского льда с вязко-пластичной реологией / С. Петров // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XX международной конференции. — 2020. — С. 299—304.

6. *Петров, С.* Сравнение схем Тейлора-Галеркина для решения уравнения переноса на сфере / С. Петров // Международная молодежная школа и конференция по вычислительно-информационным технологиям для наук об окружающей среде, CITES 2021. — 2021. — С. 176—178.
7. *Petrov, S.* The Optimized Finite Element Dynamical Core of the Arctic Ocean Sea Ice Model / S. Petrov, N. Iakovlev // *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies.* — Springer International Publishing, 2021. — С. 389—400.
8. *Петров, С.* Методы решения нелинейных уравнений динамики морского льда с использованием библиотеки Fenics / С. Петров, Н. Яковлев // Труды 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Прикладная математика и информатика. — 2018. — С. 173—175.
9. *Петров, С.* Методы решения двумерных уравнений динамики морского льда с вязко-пластичной реологией / С. Петров // Труды 62-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Прикладная математика и информатика. — 2018. — С. 164—166.
10. *Петров, С.* Новая конечно-элементная модель динамики морского льда на треугольных A и CD сетках в локально-декартовом базисе / С. Петров // Труды 65-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Прикладная математика и информатика. — 2023. — С. 25—27.
11. *Петров, С.* Реализация схем переноса типа Тейлора – Галеркина для морского льда на сфере с помощью пакета INMOST / С. Петров // Конференция международных математических центров мирового уровня. — 2021. — С. 184—185.

### **Зарегистрированные программы для ЭВМ**

12. *Заявка 2023660379, Российская Федерация, Федеральная служба по интеллектуальной собственности.* «Конечно-элементная модель динамики морского льда на неструктурированных треугольных сетках» / С. С. Петров (Российская Федерация) ; С. С. Петров ; Патент программы для ЭВМ. Поверен Стуловым В. И. — № 2023662057 ; заявл. 19.05.2023 ; опубл. 06.06.2023.
13. *Заявка 2023660394, Российская Федерация, Федеральная служба по интеллектуальной собственности.* «Одномерная конечно-объемная модель термодинамики морского льда со снегом» / С. С. Петров (Российская Федерация) ; С. С. Петров ; Патент программы для ЭВМ. Поверен Кащицкой В. Ю. — № 2023661045 ; заявл. 19.05.2023 ; опубл. 26.05.2023.

*Петров Сергей Сергеевич*

Новая модель динамики-термодинамики морского льда на кусочно-гладкой поверхности  
и ее параллельная численная реализация на неструктурированных треугольных сетках

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать \_\_\_\_ . \_\_\_\_ . \_\_\_\_ . Заказ № \_\_\_\_\_

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография \_\_\_\_\_