

На правах рукописи



Фукалов Антон Александрович

**Задачи о равновесии
упругих трансверсально-изотропных
центрально-симметричных тел:
аналитические решения и их приложения**

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Пермь – 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
на кафедре «Механика композиционных материалов и конструкций»

Научные руководители:	Соколкин Юрий Викторович, Заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор; Зайцев Алексей Вячеславович, кандидат физико-математических наук
Официальные оппоненты:	Митюшов Евгений Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Металлургические и роторные машины» Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина» Паршин Дмитрий Александрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет»

Защита состоится « 22 » декабря 2022 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 004.036.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук (филиал — Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук) по адресу: 614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1; тел: (342) 237-84-61; факс: (342) 237-84-87; сайт: www.icmm.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан « ____ » ноября 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, доцент

Зуев Андрей Леонидович

Общая характеристика работы

Актуальность избранной темы. В различных отраслях промышленности, строительстве, геологии, на предприятиях аэрокосмического и нефте-газо-химического комплексов находят применение элементы конструкций и сооружений (монолитные крепи сферических горных выработок, контейнеры для длительного хранения и транспортировки высокоагрессивных и реакционно-способных твердых и жидких сред, отдельные узлы авиационной и ракетно-космической техники) в виде массивных толсто-стенных сфер, изготавливаемых из анизотропных материалов, весом которых нельзя пренебречь. Наиболее распространенными видами нагрузки для этих тел являются равномерно и/или неравномерно распределенное статическое или изменяющееся во времени внешнее и/или внутреннее давление и гравитационные силы. Определение напряженно-деформированного состояния, оптимальное проектирование, оценка прочности элементов конструкций ответственного назначения и сооружений являются **актуальными задачами**. Постоянно возрастающие требования к применяемым и вновь создаваемым конструкционным материалам расширяют области использования композитов. Эти материалы проектируют вместе с конструкциями, в которых они используются. Поэтому также **актуальным** является учет анизотропии фаз современных композитов при прогнозировании эффективных свойств и разработке новых моделей деформирования.

Степень разработанности темы. Равновесие упругих изотропных сферических тел достаточно хорошо изучено. Этой проблеме посвящены пионерские работы G. Lamé (впервые получено решение задачи о равновесии упругой изотропной сферы), а также статьи и монографии V. Cherruti, W. Thomson, A. E. H. Love, C. Somigliana, O. Tedone, А. И. Лурье. Решению задач для симметрично нагруженных упругих сфер посвящены работы Б. Г. Галеркина, Л. Н. Ломоноса, F. Rosental, C. Weber, E. Sternberg, К. В. Соляник-Крассы, G. Fichera и др. Решением задач определения напряженного состояния в окрестности сферических полостей занимались R. A. Eubanks, J. Larmor, M. Sadowsky, R. Southwell, V. E. Sternberg, М. Т. Алимжанов, Ф. Ф. Губин, В. Г. Ефремов А. В. Кривоченко, Г. Н. Савин, А. Н. Спорыхин, Н. А. Стрельчук, Г. Л. Хесин, А. С. Чеботарев, А. И. Шашкин и др. Задачи для сред со сферическими включениями рассматривались в работах J. D. Eshelby, Z. Hashin, T. Mura, R. M. Christensen, P. J. Withers, P. В. Гольдштейна и К. Б. Устинова, М. Л. Качанова и И. Б. Севостьянова, Ю. В. Соколкина, А. А. Ташкинова и А. А. Панькова, С. А. Лурье, А. Н. Власова, Д. Б. Волкова-Богородского, Ю. О. Соляева с соавторами, Е. Н. Вильчевской, Н. Ф. Морозова и А. Б. Фрейдина с соавторами и др., в том числе – в приложении к центрально-симметричным задачам механохимии.

Библиографический список работ, посвященных исследованию неупругого поведения изотропных тел сферической формы (в т.ч. и для геомеханических приложений) обширен. Несмотря на то, что большинство конструкционных материалов, используемых при изготовлении сооружений, не изотропно, подавляющее большинство авторов ограничиваются именно этим приближением. Вопросами равновесия анизотропных сфер занимались В. Saint-Venant, С. Г. Лехницкий, Г. Б. Колчин, Е. К. Ковалов, А. Х. Шармазаншвили, Dai Hong-Liang, Zheng Hong-Yan, Yang Lei и др. исследователи. Большое количество монографий и статей посвящены анализу поведения конструкций и сооружений,

имеющих форму полых толстостенных сфер, при воздействии внешнего и/или внутреннего давления. Проблема влияния массовых сил на напряженно-деформированное состояние рассматривалась Л. Л. Кожевниковой, Г. Б. Кузнецовым, В. П. Матвеевко, И. Н. Шардаковым, А. А. Роговым и их соавторами только для изотропных сферических тел. В отечественной и зарубежной научной литературе отсутствуют монографии и статьи, посвященные построению аналитических решений задач о равновесии полых и составных анизотропных толстостенных сферических тел, находящихся под действием внутреннего и внешнего давления в поле гравитационных сил.

Массивные конструкции не создаются мгновенно. Поэтому для них важно учитывать постепенное нарастание массы в процессе производства. Задачи для растущих тел решались в приближении малых и конечных деформаций в работах Н. Х. Арутюняна, А. В. Манжирова, Д. А. Паршина, С. А. Лычева и их учеников. Тела были изготовлены из изотропных упругих или вязкоупругих стареющих материалов. В диссертационной работе предполагается, что элементы конструкций и сооружений в виде полых и составных толстостенных упругих сфер уже созданы (процесс производства не рассматривается), находятся в равновесии под действием гравитационных сил и демонстрируют при заданных центрально- и осесимметричных нагрузках малые изменения объема и формы.

Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем.

– получены новые аналитические решения задач о равновесии упругих полых и составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и равномерного внутреннего или внешнего давления, при условии задания на внешней или внутренней поверхности жесткого закрепления или ограничения на перемещения в радиальном направлении с обеспечением возможности идеального скольжения без трения;

– получены новые аналитические решения задач о равновесии составных толстостенных упругих трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием внутреннего и внешнего равномерного давления;

– выведены в рамках полидисперсных моделей аналитические выражения для эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных композитов с однородно распределенными трансверсально-изотропными сплошными или полыми сферическими включениями в изотропной матрице;

– с помощью полученных решений выполнен анализ влияния параметров анизотропии и массовых сил на закономерности напряженно-деформированного состояния полых и составных трансверсально-изотропных центрально-симметричных тел, проведена многокритериальная оценка прочности монолитных крепей сферических горных выработок и составных сферических сосудов давления.

Цели и задачи. **Целью диссертационной работы** является получение новых аналитических решений задач для упругих трансверсально-изотропных центрально-симметричных тел.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи** :

- получение новых аналитических решений задач о равновесии тяжелых полых и составных упругих трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием внут-

ренного или внешнего давления, с жестко закрепленной или закрепленной в радиальном направлении (с идеальным скольжением без трения) внешней или внутренней поверхностью соответственно; определение вклада массовых сил в распределение независимых инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях;

- получение новых аналитических решений задач о равновесии составных толстостенных тел, состоящих из двух посаженных с натягом упругих трансверсально-изотропных сфер с общим центром и нагруженных внешним и внутренним равномерными давлениями;

- выявления закономерностей совместного деформирования крепи сферической подземной выработки и окружающего массива осадочных пород и фрагментированных сыпучих сред, а также внутренней и внешней частей составных сосудов давления; определения влияния параметров анизотропии материала на характер распределения инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях; оценки исчерпания несущей способности по совокупности критериев, учитывающих различные механизмы разрушения, характерные для трансверсально-изотропных материалов;

- прогнозирования в рамках полидисперсных моделей механики композитов эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных материалов, изотропная матрица которых содержит однородно распределенные трансверсально-изотропные сплошные или полые сферические включения.

Положения, выносимые на защиту:

- новые аналитические решения задач о равновесии полых и составных упругих трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, внутреннего или внешнего давления, с жестко закрепленной внешней или внутренней поверхностью соответственно;

- новые аналитические решения задач о равновесии составных упругих трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, внутреннего или внешнего давления, с радиально закрепленными внешней или внутренней поверхностями, на которых реализуются условия идеального скольжения без трения;

- новые аналитические решения задач о равновесии находящихся под действием внешнего и внутреннего равномерных давлений составных толстостенных тел, состоящих из двух посаженных с натягом упругих трансверсально-изотропных сфер с общим центром;

- полученные в рамках полидисперсных моделей механики аналитические выражения для эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных композитов, изотропная матрица которых содержит однородно распределенные трансверсально-изотропные сплошные или полые сферические включения;

- результаты многокритериальной оценки прочности монолитных крепей сферических горных выработок, выполненной с учетом влияния окружающего массива осадочных пород и сыпучих сред, и составных сферических сосудов давления.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные новые аналитические решения могут быть использованы для описания процессов деформирования постепенно создаваемых (методами аддитивной непрерывной послойной

намотки предварительно пропитанными волокнами или лентами ткани; методами послойной выкладки, послойного наплавления, послойного осаждения из газовой или жидкой фазы) трансверсально-изотропных сферических элементов конструкций и постепенно возводимых строительных и подземных геологических сооружений; могут рассматриваться в качестве эталонов для тестирования алгоритмов решения краевых задач численными методами, могут быть полезны исследователям при отработке методик натуральных экспериментов со сферическими тяжелыми телами (в том числе для идентификации материальных констант и функций анизотропных сред, создаваемых совместно с конструкциями, в которых они используются). Полученные новые аналитические решения позволяют также определять напряженно-деформированное состояние, проводить оптимальное проектирование и получать оценки прочности сферических конструкций и сооружений ответственного назначения, используемых в различных отраслях машиностроения, горном деле, строительной механике и других областях. Полученные результаты, иллюстрирующие возможную реализацию механизмов исчерпания несущей способности сосудов давления и железобетонных монолитных крепей сферических подземных выработок и окружающего породного массива от растяжения или сжатия в меридиональном или радиальном направлении, разрушения по механизму межслойного сдвига, могут быть полезны при проектировании систем мониторинга геологических сооружений и тяжелых сферических конструкций.

Результаты диссертационной работы получены в рамках исследований, проводимых на кафедре «Механика композиционных материалов и конструкций» ПНИПУ с участием автора в рамках задания № 2014/152 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности (базовая часть госзадания Минобрнауки РФ, код проекта – 1911), государственного задания Минобрнауки РФ FSNM–2020–0027 на выполнение фундаментальных научных исследований на 2020 г. и плановый период 2021 и 2022 гг., грантов Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ–Урал № 07–01–96056, № 11–01–96033, № 14–01–96029, № 16–41–590396, № 17–41–590148 и № 19–41–590026, РФФИ № 11–01–00910, 14–01–00726 и 15–01–08678).

Методология и методы диссертационного исследования. Аналитические решения задач получены в рамках гипотез и ограничений классической теории упругости методом разложения компонент вектора перемещений в ряды по полиномам Лежандра по меридиональной координате. Коэффициенты разложений найдены в виде линейных комбинаций степенных функций радиальной координаты.

Степень достоверности результатов и выводов. Достоверность подтверждается корректным использованием аппарата математической теории упругости, численных методов решения задач механики деформируемого твердого тела (метод конечных элементов), аналитических методов прогнозирования эффективных упругих модулей дисперсно-упрочненных композитов матричного типа (в рамках полидисперсных моделей), методов решения краевых задач математической физики и корректным сравнением частных случаев полученных аналитических решений с аналитическими, численными и экспериментальными результатами других авторов.

Апробация результатов исследования. Результаты, представленные в диссертации, доложены автором и обсуждены на XXXVI, XXXVIII – XL Международ-

ных летних школах-конференциях «Актуальные проблемы механики» (Санкт-Петербург, 2008, 2010–2012 гг.); 8 Европейской конференции по механике твердого тела (Грац, Австрия, 2012 г.); 39 международной конференции по механике деформируемого твердого тела (Закопане, 2014 г., Польша); II и V Международных конференциях «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Дилижан, 2010 г. и Цахкадзор, 2017 г., Армения); XXVII Международной конференции «Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций», (Санкт-Петербург, 2017 г.); XXXVI–XXXVIII Международных молодежных научных конференциях «Гагаринские чтения» (Москва, 2010–12 гг.); XVI–XX Зимних школах по механике сплошных сред (Пермь, 2009, 2011, 2013, 2015 и 2017 гг.); XII Всероссийской научно-технической конференции «Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации» (Пермь, 2009 г.); 17–21, 24 и 25 Всероссийских школах-конференциях молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, 2008–12, 2015 и 2016 гг.); VIII–X Международных конференциях «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (Екатеринбург, 2014, 2016 и 2018 гг.); 1, 5 и 10 Всероссийских научных конференциях с международным участием им. И. Ф. Образцова и Ю. Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» (Москва, 2010, 2015 и 2020 гг.); X и XI Всероссийских съездах по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011 г. и Казань, 2015 г.); 1 и 5 международных научных конференциях-школах молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах» (Москва, 2015 и 2019 гг.), X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Самара, 2017 г.).

Основные положения диссертационной работы доложены и обсуждены на научных семинарах кафедр ПНИПУ: «Механика композиционных материалов и конструкций» (руководитель – Заслуженный деятель науки РФ, д.ф.-м.н., профессор Ю. В. Соколкин, 2011–15 гг.), «Математическое моделирование систем и процессов» (руководитель – Заслуженный деятель науки РФ, д.ф.-м.н., профессор П. В. Трусов, 2016, 2021 и 2022 гг.), объединенных научных семинарах кафедр «Динамика и прочность машин» и «Вычислительная математика и механика» (руководитель – д.ф.-м.н., доцент И. Э. Келлер, 2017 г.), «Механика композиционных материалов и конструкций» и «Экспериментальная механика и конструкционное материаловедение» (руководитель – д.т.н., профессор А. Н. Аношкин и д.ф.-м.н., профессор В. Э. Вильдеман, 2021 и 2022 гг.); научных семинарах кафедры «Прикладная математика и информатика» СамГТУ (руководитель – д.ф.-м.н., профессор В. П. Радченко, 2017 г.), ИМСС УрО РАН (руководитель – академик РАН В. П. Матвеев, 2016 и 2022 гг.), лаборатории «Механика прочности и разрушения материалов и конструкций» ИПМех им. А. Ю. Ишлинского РАН (руководитель – чл. корр. РАН Р. В. Гольдштейн, 2016 г.) и Санкт-Петербургском городском семинаре по механике в ИПМаш РАН (руководитель – чл. корр. РАН Д. А. Индейцев, 2017 г.).

Публикации. Научные результаты диссертационной работы опубликованы в монографии [1], 4 статьях в журналах, входящих в базы цитирования Web of Science [2, 7–9], 2 статьях в журналах, входящих в базы цитирования Scopus [5, 10]; 3 статьях в журналах из перечня, рекомендованного ВАК РФ [3, 4, 6]; в 25 статьях в материалах и тезисах докладов Всероссийских и международных конференций.

Личный вклад автора заключается в получении новых аналитических решений задач о равновесии полых и составных толстостенных анизотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, выводе в рамках полидисперсных моделей аналитических выражений для эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных композитов с однородно распределенными трансверсально-изотропными сплошными или полыми сферическими включениями. Направление исследования, его цель и постановки задач были сформулированы совместно с научными руководителями, с которыми обсуждались все полученные новые научные результаты и готовились к публикации статьи на их основе.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 112 страницах, содержит 19 рисунков, 2 таблицы; список литературы представлен 125 источниками.

Краткое содержание работы

Во **введении** представлен краткий обзор, отражающий современное состояние вопросов исследования, сделано заключение о научной новизне и актуальности темы, сформулированы цель и задачи диссертационной работы, новые научные результаты и положения, выносимые на защиту; описаны методология и методы диссертационного исследования, приведено краткое описание содержания диссертации по главам.

В **первой главе** приведены основные уравнения теории упругости в ортогональной сферической системе координат ρ , θ и φ . Рассмотрена линейно-упругая тяжелая сфера (центр совпадает с началом системы координат), ограниченная поверхностями радиусов ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$), находящаяся в состоянии равновесия в поле гравитационных сил. Здесь и далее центрально-симметричное тело, при математическом описании которого возникает необходимость учета массовых сил, будем называть тяжелым. Материал рассматриваемого тела предполагался однородным, с постоянной плотностью по всему объему, сферически трансверсально-изотропным относительно любого радиус-вектора, проведенного из центра в данную точку. Поскольку на центрально-симметричное тело действует произвольная нагрузка, симметричная относительно вертикальной диаметральной оси, то компоненты вектора перемещения, тензоров напряжений и деформаций не зависят от окружной координаты φ , удовлетворяют уравнениям равновесия:

$$\begin{aligned} \partial_\rho \sigma_{\rho\rho} + (\partial_\theta \tau_{\rho\theta} + 2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta) / \rho + F_\rho &= 0, \\ \partial_\rho \tau_{\rho\theta} + [\partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\theta}] / \rho + F_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и геометрическим соотношениям Коши:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \partial_\rho u_\rho, \quad \rho\varepsilon_{\theta\theta} = \partial_\theta u_\theta + u_\rho, \quad \rho\varepsilon_{\varphi\varphi} = u_\theta \operatorname{ctg} \theta + u_\rho, \quad \gamma_{\rho\theta} = \partial_\rho u_\theta + (\partial_\theta u_\rho - u_\theta) / \rho. \quad (2)$$

Здесь $F_\rho = -\gamma \cos \theta$ и $F_\theta = \gamma \sin \theta$ – компоненты вектора массовых сил, γ – удельный вес материала и $\partial_x = \partial / \partial x$.

Определяющие соотношения для трансверсально-изотропного тела

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= A_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{12}(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}), & \sigma_{\varphi\varphi} &= A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{23}\varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta}, & \tau_{\rho\theta} &= A_{44}\gamma_{\rho\theta} \end{aligned} \quad (3)$$

содержат коэффициенты: $A_{23} = E(\nu + \tilde{\nu}^2 E/\tilde{E})/(m + m\nu)$, $A_{22} = E(1 - \tilde{\nu}^2 E/\tilde{E})/(m + m\nu)$, $A_{11} = \tilde{E}(1 - \nu)/m$, $A_{12} = E\tilde{\nu}/m$, $A_{44} = \tilde{G}$ и $m = 1 - \nu - 2\tilde{\nu}^2 E/\tilde{E}$. Здесь \tilde{E} и E – модули Юнга в направлениях ρ и θ ; \tilde{G} – модуль сдвига для диаметральной плоскости; $\tilde{\nu}$ и ν – коэффициенты Пуассона, характеризующие сокращение тела в направлениях θ и ϕ при растяжении вдоль ρ и поперечные деформации в плоскости, нормальной к ρ , при растяжении в той же самой плоскости.

При подстановке геометрических соотношений (2) в определяющие (3), а полученного результата – в уравнения равновесия (1) была записана неоднородная система дифференциальных уравнений Ламе второго порядка в частных производных.

Предполагалось, что на внешней и внутренней поверхности сферы заданы распределенные давления или перемещения, симметричные относительно вертикальной диаметральной оси. Поэтому компоненты вектора перемещений также зависят только от меридиональной θ и радиальной ρ координаты и могут быть представлены в виде рядов:

$$u_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\rho_n}(\rho) P_n(\cos\theta), \quad u_\theta = -\sum_{n=0}^{\infty} u_{\theta_n}(\rho) \partial_\theta P_n(\cos\theta), \quad (4)$$

$$u_{\rho_n} = \sum_{j=1}^4 x_{jn} C_{jn} \rho^{\lambda_{jn}}, \quad u_{\theta_n} = \sum_{j=1}^4 C_{jn} \rho^{\lambda_{jn}}. \quad (5)$$

Здесь $P_n(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра.

Подстановка (4) в неоднородную систему дифференциальных уравнений Ламе позволила перейти к n системам обыкновенных дифференциальных уравнений (однородных при $n=0$ и $n>1$, неоднородной при $n=1$), каждая из которых рассматривалась в виде самостоятельной задачи и решалась с использованием разложения (5).

Получены новые аналитические решения задач о равновесии тяжелых упругих трансверсально-изотропных центрально-симметричных тел:

$$u_\rho = u_{\rho_0} + u_{\rho_1} \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} u_{\rho_n} P_n(\cos\theta), \quad u_\theta = u_{\theta_1} \sin\theta - \sum_{n=2}^{\infty} u_{\theta_n} \partial_\theta P_n(\cos\theta), \quad (6)$$

$$u_{\rho_0} = \rho^{-1/2-k} C_{10} + \rho^{-1/2+k} C_{20}, \quad u_{\theta_1} = C_{11} + C_{21}/\rho + C_{31} \rho^{-1/2+t} + C_{41} \rho^{-1/2-t} + H_\rho \rho^2,$$

$$u_{\rho_1} = x_{11} C_{11} + x_{21} C_{21}/\rho + x_{31} C_{31} \rho^{-1/2+t} + x_{41} C_{41} \rho^{-1/2-t} + H_\rho \rho^2,$$

$$u_{\rho_n} = x_{1n} C_{1n} \rho^{\lambda_{1n}} + x_{2n} C_{2n} \rho^{\lambda_{2n}} + x_{3n} C_{3n} \rho^{\lambda_{3n}} + x_{4n} C_{4n} \rho^{\lambda_{4n}},$$

$$u_{\theta_n} = C_{1n} \rho^{\lambda_{1n}} + C_{2n} \rho^{\lambda_{2n}} + C_{3n} \rho^{\lambda_{3n}} + C_{4n} \rho^{\lambda_{4n}}.$$

Здесь $H_\rho H = [A_{22} + A_{23} - 2(A_{12} + A_{44})]\gamma$, $H_\theta H = [2(A_{11} - A_{44}) - A_{22} - A_{23}]\gamma$,

$$x_{11} = -1, \quad x_{21} = \frac{A_{22} + A_{23} + 2A_{44}}{A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44}}, \quad x_{31} = A_{44} \frac{\tilde{H} + 2\tilde{h}t}{\hat{H}}, \quad x_{41} = A_{44} \frac{\tilde{H} - 2\tilde{h}t}{\hat{H}},$$

$$H = 2[A_{11}(A_{22} + A_{23} - 4A_{44}) + 2A_{44}(A_{22} + A_{23} - 3A_{12}) - 2A_{12}^2], \quad \tilde{h} = A_{12} + A_{44},$$

$$\hat{H} = 2\tilde{h}^2 - A_{11}(A_{22} + A_{23} + 2A_{44}), \quad \tilde{H} = A_{12} - 2(A_{22} + A_{23}) - 3A_{44},$$

а

$$k = \sqrt{1/4 + 2(A_{22} + A_{23} - A_{12})/A_{11}},$$

$$t = \sqrt{9/4 + \{2(A_{22} + A_{23} - A_{12}) + [A_{11}(A_{22} + A_{23}) - 2A_{12}(A_{12} + 2A_{44})]/A_{44}\}/A_{11}}$$

являются показателями анизотропии «классическим» при $n=0$ (входящим в аналитическое решение В. Saint-Venant) и при $n=1$ соответственно.

Характеристические числа λ_{jn} и коэффициенты x_{jn} ($j=1, 2, 3$ и 4) для любого n могут быть найдены из уравнений:

$$[\lambda_n(\lambda_n + 1) + \beta_{3n}][\lambda_n(\lambda_n + 1) + \alpha_{3n}] = (\alpha_{4n}\lambda_n + \alpha_{5n})(\beta_{4n}\lambda_n + \beta_{5n}),$$

$$x_{jn} = \frac{\lambda_{jn}(\lambda_{jn} + 1 - \alpha_{4n}) + \beta_{3n} - \alpha_{5n}}{\lambda_{jn}(\lambda_{jn} + 1 - \beta_{4n}) + \alpha_{3n} - \beta_{5n}}, \quad \alpha_{sn} = \frac{a_{sn}}{a_{1n}}, \quad \beta_{sn} = \frac{b_{sn}}{b_{1n}},$$

где $a_{1n} = A_{11}$, $a_{2n} = 2A_{11}$, $a_{3n} = 2(A_{12} - A_{22} - A_{23}) - A_{44}\tilde{H}$, $a_{4n} = (A_{12} + A_{44})\tilde{H}$,
 $a_{5n} = (A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44})\tilde{H}$, $b_{1n} = A_{44}$, $b_{2n} = 2A_{44}$, $b_{4n} = -(A_{12} + A_{44})$,
 $b_{3n} = -A_{23} - 2A_{44} - A_{22}(\tilde{H} - 1)$, $b_{5n} = -(A_{22} + A_{23} + 2A_{44})$, $\tilde{H} = n(n+1)$.

Постоянные интегрирования C_{1n} , C_{2n} , C_{3n} и C_{4n} в формулах (6) определялись из граничных условий, допускающих для каждого n разложение по полиномам Лежандра. Для $n > 1$ системы дифференциальных уравнений однородны. Поэтому, если граничные условия, разложенные в ряды по полиномам Лежандра для $n > 1$, также однородны, то решения систем уравнений – тривиальны: $u_{\rho n} = 0$ и $u_{\theta n} = 0$.

Последовательная подстановка (6) в геометрические (2) и определяющие соотношения (3), позволила записать выражения для деформаций и напряжений в точках тяжелой сферы. Постоянные интегрирования в (6) были определены из граничных условий:

$$u_{\rho}|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad u_{\theta}|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad \sigma_{\rho\rho}|_{\rho=\rho_1} = -p, \quad \tau_{\rho\theta}|_{\rho=\rho_1} = 0$$

или $u_{\rho}|_{\rho=\rho_1} = 0, \quad u_{\theta}|_{\rho=\rho_1} = 0, \quad \sigma_{\rho\rho}|_{\rho=\rho_2} = -p, \quad \tau_{\rho\theta}|_{\rho=\rho_2} = 0.$

в результате чего были записаны новые аналитические решения задач о равновесии упругих трансверсально-изотропных тяжелых центрально-симметричных тел с закрепленной внешней или внутренней поверхностью, нагруженных равномерным внутренним или внешним давлением соответственно.

Замена $\tilde{E} = E$, $\tilde{G} = G = E/[2(1 + \nu)]$ и $\tilde{\nu} = \nu$ позволила записать выражения для перемещений, деформаций и напряжений в точках изотропного центрально-симметричного тела, совпадающие с известным решением¹. При этом, благодаря учету ограничений на материальные константы трансверсально-изотропного материала, в решении (6), записанном для изотропной сферы, удалось определить явный вид коэффициентов $H_{\rho} = \gamma(1-\nu)/(3E)$ и $H_{\theta} = -2\gamma\nu/(3E)$. Это принципиально нельзя было сделать ранее.

На рисунке 1 показаны перемещения точек свободных от закрепления поверхностей (внутренней – справа и внешней – слева) тяжелых мраморных сфер ($\rho_1 = 3,0$ м и $\rho_2 = 6,0$ м), находящихся под давлениями $p = 0$ МПа и $p = 5$ МПа. Характеристики мрамора: $E = 55,0$ ГПа, $\tilde{E} = 23,0$ ГПа, $\nu = 0,29$, $\tilde{\nu} = 0,32$, $\tilde{G} = 29,0$ ГПа и $\gamma = 27$ кН/м³.

Проведено сравнение полученного нового аналитического решения задачи о равновесии тяжелой толстостенной трансверсально-изотропной сферы с жестко закрепленной

¹ Кожевникова, Л. Л. Аналитическое исследование упругого равновесия полой сферы, жестко закрепленной по внешнему контуру / Л. Л. Кожевникова, Г. Б. Кузнецов, В. П. Матвеев, И. Н. Шардаков // Пробл. прочности. – 1974. – № 9. С. 20–23.

внешней поверхностью с численно определенными в пакетах ANSYS 13.0 и ABAQUS 6.12 перемещениями, деформациями и напряжениями, показавшее хорошее количественное соответствие конечно-элементных результатов, представленных в инвариантной форме (максимальная погрешность не превышает 2%). Следуя Я. Рыхлевскому и Б. Е. Победре, инвариантами относительно ортогональных преобразований, допустимых над сферически трансверсально-изотропным однородным телом, будут $J^{IV} = \sqrt{\tau_{\rho\phi}^2 + \tau_{\rho\theta}^2}$, $J^{II} = \sigma_{\rho\rho}$ и $J^I = (\sigma_{\phi\phi} + \sigma_{\theta\theta})/2$. Проведена оценка прочности железобетонной крепи сферической горной выработки с использованием многокритериального подхода, развитого в работах В. Э. Вильдемана, Ю. В. Соколкина, А. А. Ташкинова и их учеников и позволяющего учесть различные механизмы разрушения анизотропных тел.

Во **второй** главе получены новые аналитические решения задач о равновесии упругих трансверсально-изотропных составных тяжелых центрально-симметричных тел, нагруженных внутренним или внешним давлениями при условии полного (в радиальном и меридиональном направлении) и частичного (только вдоль радиальной координаты с сохранением возможности идеального скольжения без трения) закрепления внешней или внутренней поверхности. На сферической поверхности контакта, определяемой радиусом ρ_c , были заданы условия идеального сопряжения.

Возможное использование новых аналитических решений – описание совместного деформирования монолитных железобетонных крепей сферических подземных выработок и окружающего массива осадочных пород или фрагментиро-

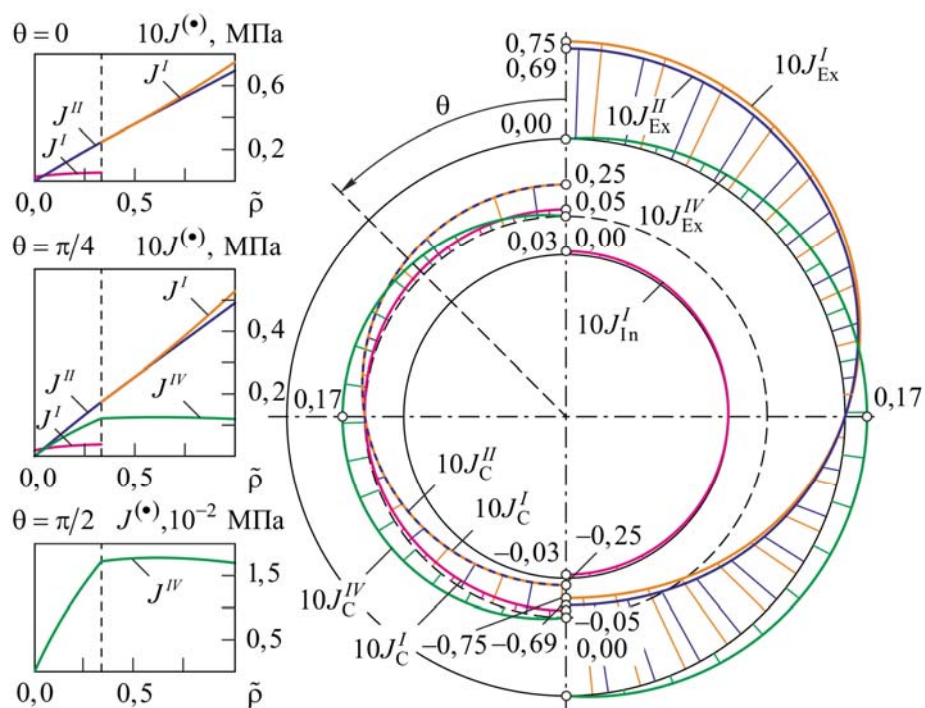


Рисунок 2 – Распределение инвариантов тензора напряжений (МПа) на закрепленной внешней (J_{Ex}^*), свободной от нагрузок внутренней (J_{In}^*) и контактной (J_C^*) поверхностях ($\rho_1 = 2,5$ м, $\rho_c = 3,1$ м и $\rho_2 = 4,3$ м)

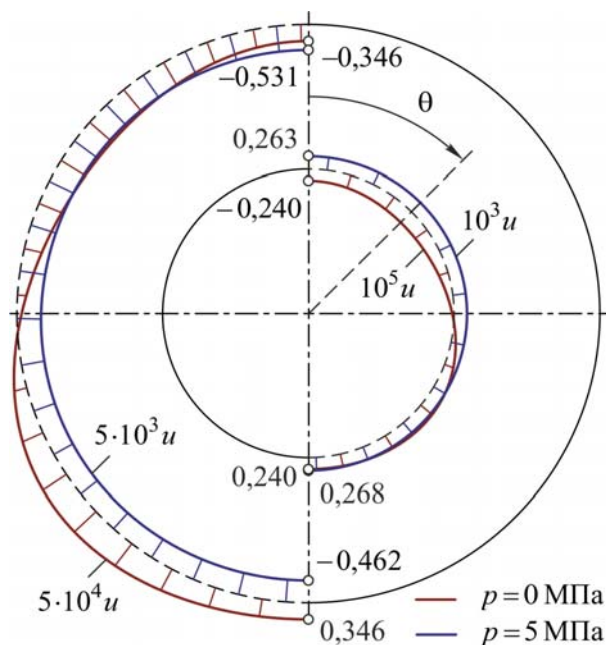


Рисунок 1 – Перемещения (м) точек свободной поверхности сфер

ванных сыпучих сред, определение вклада массовых сил в распределение ненулевых инвариантов тензора напряжений вдоль обезразмеренной радиальной $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$ и меридиональной θ координаты (рисунок 2), проведение оценки потери несущей способности по совокупности критериев. Равномерное внутренне давление на крепь, характеристики железобетона, осадочных или сыпучих пород выбраны равными: $p = 0$ МПа; $\gamma = 40$ кН/м³, $E = 40,0$ ГПа, $\tilde{E} = 25,0$ ГПа, $\tilde{G} = 11$ ГПа, $\nu = 0,075$ и $\tilde{\nu} = 0,15$; $\gamma = 27$ кН/м³, $E = 55,0$ ГПа, $\tilde{E} = 23,0$ ГПа, $\tilde{G} = 29,0$ ГПа, $\nu = 0,29$ и $\tilde{\nu} = 0,32$ соответственно.

На внутренней поверхности (рисунок 2) ненулевым является только J^I (нелинейно распределен вдоль $\tilde{\rho}$ и имеет скачок на поверхности контакта). В точках вертикальной диаметральной оси возможно начало разрушения крепи от растяжения (сжатия) в окружном и радиальном направлении, где J^I и J^{II} максимальны по абсолютной величине. Распределение J^{IV} показало, что наиболее опасными для потери несущей способности от межслойного сдвига являются точки горизонтальной диаметральной плоскости.

На рисунке 3 проиллюстрировано влияние отношения толщин массива фрагментированных сыпучих сред (внешняя поверхность которого радиально закреплена с возможностью идеального скольжения без трения) и монолитной железобетонной крепи $\Delta = \delta_1/\delta_2$ ($\delta_2 = \rho_2 - \rho_c$, $\delta_1 = \rho_c - \rho_1 = const$) на характер распределения обезразмеренных инвариантов тензора напряжений $\tilde{J}^{(\bullet)}$ вдоль $\tilde{\rho}$ в наиболее опасных поперечных сечениях. Значения \tilde{J}^I и \tilde{J}^{II} снижаются в точках свода, при заданных материальных константах нелинейно распределены вдоль $\tilde{\rho}$ и меняют знак при увеличении δ_2 (толщины массива сыпучих сред). С увеличением Δ значения \tilde{J}^{IV} снижаются, оставаясь максимальными на поверхности контакта крепи с породным массивом.

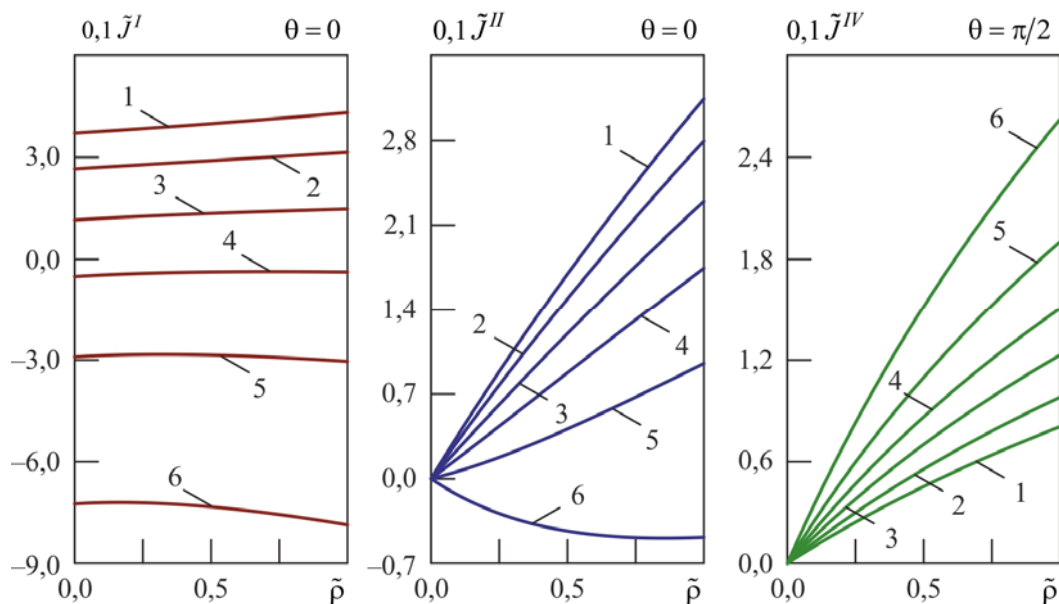


Рисунок 3 – Распределения $\tilde{J}^{(\bullet)}$ в характерных сечениях монолитной железобетонной крепи: 1 – $\Delta = 1$, 2 – $\Delta = 0,5$, 3 – $\Delta = 0,2$, 4 – $\Delta = 0,1$, 5 – $\Delta = 0,05$, 6 – $\Delta = 0,02$

Третья глава посвящена получению новых аналитических решений задач о равновесии (без учета массовых сил) упругих толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием равномерных внутреннего и внешнего давлений.

Найденное решение позволило проанализировать влияние показателя анизотропии материала ($k = 1,5$ соответствует изотропной среде) внутренней и внешней частей составных сферических сосудов давления на характер распределения ненулевых инвариантов тензора напряжений вдоль радиальной координаты $\hat{\rho}$ (рисунок 4). Внутреннее и внешнее равномерные давления предполагались равными $p_1 = 1$ МПа и $p_2 = 5$ МПа, а модули материалов выбирались с учетом положительности собственных значений оператора упругости для трансверсально-изотропного тела².

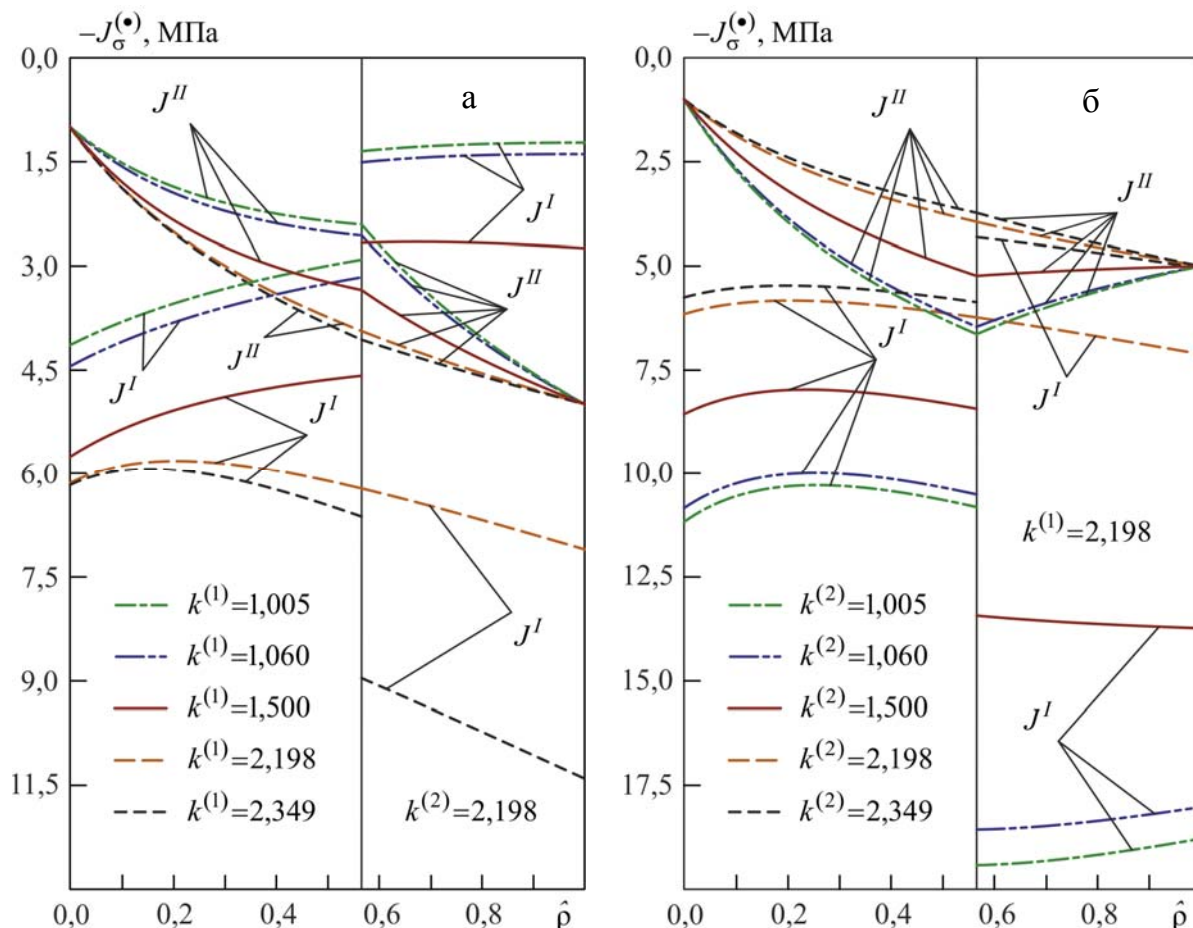


Рисунок 4 – Распределение инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях составных сосудов давления ($\rho_1 = 3,0$ м, $\rho_c = 4,7$ м и $\rho_2 = 6,0$ м) в зависимости от показателя анизотропии материала внутренней (а) или внешней (б) части

Увеличение показателей анизотропии материала внутренней $k^{(1)}$ или внешней $k^{(2)}$ частей приводит к росту или снижению по абсолютной величине значений J^I и J^{II} . Многокритериальная оценка прочности выявила, что при заданных давлениях разрушение от растяжения или сжатия в радиальном направлении может начаться в точках внешней поверхности, а при $k^{(1)} > k^{(2)}$ – на поверхности контакта. Опасными для возможного начала разрушения от растяжения или сжатия в окружном направлении являются точки внешней или контактной поверхности сосуда давления при $k^{(1)} > k^{(2)}$, а при $k^{(1)} < k^{(2)}$ – точки внутренней поверхности (рисунок 4), что свидетельствуют о возможности управления величинами и характером распределения напряжений при проектиро-

² Mityushov, E. A. Effective elastic properties of textured cubic polycrystals / E. A. Mityushov, S. A. Berestova, N. Yu. Odintsova // Textures, Stress and Microstructures. – 2002. – Vol. 35, № 2. – P. 99–111.

вании составных элементов конструкций. Это управление может быть реализовано изменением схемы армирования материала при сохранении свойств элементов структуры.

Одним из важных приложений полученных аналитических решений являются задачи прогнозирования эффективных характеристик дисперсно-упрочненных композитов. В рамках полидисперсных моделей механики получены выражения для модуля объемного сжатия материала, изотропная матрица которого армирована сплошными

$$K_{\theta\phi}^* = \frac{4G_M c^3 (H_1 - 6K_M) + 3K_M (H_1 + 8G_M)}{3[H_1 + 8G_M - c^3 (H_1 - 6K_M)]}, \quad H_1 = 4A_{12}^{(I)} - A_{11}^{(I)} s_{\pm}, \quad s_{\pm} = 1 \pm 2k_I \quad (7)$$

или полыми трансверсально-изотропными сферическими включениями:

$$K_{\theta\phi}^* = \frac{2H_3 [A_{12}^{(I)} H_4 - 6(c^3 - 1) K_M G_M] - A_{11}^{(I)} H_4 H_5}{3H_1 H_2 (c^3 - 1) (h^{2k_I} - 1) + 3H_3 (4G_M + 3c^3 K_M)}, \quad H_3 = 2(H_1 h^{2k_I} + H_2), \quad (8)$$

$$H_2 = A_{11}^{(I)} s_{\pm} - 4A_{12}^{(I)}, \quad H_4 = 4c^3 G_M + 3K_M, \quad H_5 = H_2 s_{\pm} + h^{2k_I} H_1 s_{\pm}.$$

Здесь K_M и G_M – объемный и сдвиговой модули матрицы; «классический» показатель анизотропии k_I , коэффициенты $A_{11}^{(I)}$ и $A_{12}^{(I)}$ определяются упругими постоянными включений; c^3 – объемное наполнение композита, а $h = R_0/R_A$ – отношение радиуса внутренней полости R_0 к внешнему радиусу включения R_A . При $R_0 \rightarrow 0$ формула (8) преобразуется в (7). В случае, если включения изотропны, из (7) следует выражение Z. Hashin³.

На рисунке 5, а представлена зависимость спрогнозированного эффективного модуля объемного сжатия смолы Диепокс 450 $K_{\theta\phi}^M$ от объемного наполнения мраморной мукой. Формула (7) лучше описывает данные эксперимента⁴ (точки на рисунке 5, а) в практически важном для применения матриц полимербетонов диапазоне объемного наполнения мукой $v_{AG} \geq 0,3$, чем полученная для приближения изотроп-

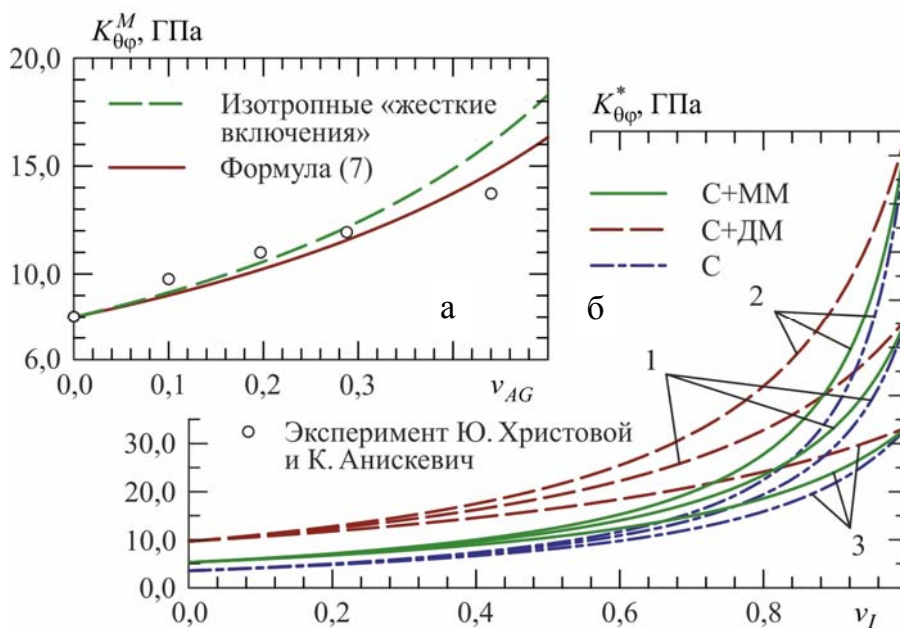


Рисунок 5 – Зависимость модуля объемного сжатия эпоксидной смолы Диепокс 450 от объемного наполнения мраморной мукой (а). Спрогнозированные эффективные модули объемного сжатия полимербетонов на основе различных матриц, армированных диабазовыми (кривые 1), мраморными (кривые 2) или гранитными (кривые 3) сферическими частицами (б)

³ Хашин, З. Упругие модули неоднородных материалов / З. Хашин // Прикл. механика: Тр. Амер. о-ва инж.-мех. – 1962. – Т. 29, № 1. – С. 159–167.

⁴ Христова, Ю. Прогнозирование ползучести отвержденной эпоксидной смолы, наполненной мраморной мукой / Ю. Христова, К. Анискевич // Механика композит. материалов. – 1994. – Т. 30, № 5. – С. 590–599.

ных «жестких включений» зависимость $K_{\theta\phi}^M(1-\nu_I) = K_M \{1 + \nu_I [4G_M / (3K_M)]\}$. Отличие данных эксперимента при $\nu_{AG} = 0,45$ от модуля $K_{\theta\phi}^M$ в вышеуказанном приближении составляет 17 %, а от полученного по формуле (7) значения – не превышает 7 %.

На рисунке 5, б представлены спрогнозированные эффективные объемные модули $K_{\theta\phi}^*$ композитов на основе различных связующих: «С» (смола Виналкид 550 без наполнителя), «С+ДМ» (Виналкид 550 с диабазовой мукой) и «С+ММ» (Виналкид 550 с мраморной мукой), армированных диабазовыми, мраморными и гранитными частицами. Полученные зависимости позволяют сделать вывод о том, что наибольшие модули объемного сжатия имеют композиты с мраморными сферическими включениями.

В заключении сформулированы основные выводы и перечислены наиболее важные результаты выполненных исследований:

- Получены новые аналитические решения задач о равновесии полых и составных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, внутреннего или внешнего давления, с жестко закрепленной внешней или внутренней поверхностью, а также при условии неполного (только радиальном направлении) закрепления. Проанализирован вклад массовых сил в распределение независимых инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях тяжелых трансверсально-изотропных сфер;
- Определены закономерности совместного деформирования крепи и окружающего массива осадочных пород, проведена оценка прочности монолитной железобетонной крепи сферической подземной выработки по совокупности критериев, получены результаты, иллюстрирующие возможную реализацию механизмов исчерпания несущей способности крепи и окружающего породного массива от растяжения или сжатия в меридиональном или радиальном направлении, разрушения по механизму сдвига.
- Получены новые аналитические решения задач о равновесии находящихся под действием внешнего и внутреннего равномерных давлений составных толстостенных тел, состоящих из двух посаженных с натягом упругих трансверсально-изотропных сфер с общим центром. Определены закономерности взаимодействия частей составной сферы, показано влияние соотношения показателей анизотропии и величины технологического давления натяга на характер распределения инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях. Показана возможность управления напряженным состоянием при проектировании составных сферических сосудов давления, увеличивая их эффективность;
- В рамках полидисперсных моделей механики получены аналитические выражения для эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных композитов изотропная матрица которых содержит однородно распределенные трансверсально-изотропные сплошные или полые сферические включения. Проанализировано влияние фазового состава полимерной матрицы и минерального наполнителя на эффективные деформационные свойства полимербетонов.

Основные публикации

1. Зайцев, А. В. Равновесие анизотропных полых сферических и цилиндрических тел под действием массовых сил / А. В. Зайцев, А. В. Кутергин, А. А. Фукалов. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2015. – 139 с.

2. Зайцев, А. В. Эффективные модули объемного сжатия дисперсно-упрочненных композитов со сплошными и полыми анизотропными сферическими включениями / А. В. Зайцев, **А. А. Фукалов** // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2010. – № 4. – С. 46–54. **Перечень ВАК РФ.**

3. Зайцев, А. В. Упругое равновесие тяжелой трансверсально-изотропной толстостенной сферы с жестко закрепленной внутренней поверхностью / А. В. Зайцев, **А. А. Фукалов** // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Физико-математические науки. – 2010. – № 5(21). – С. 85–95. **Базы Web of Science.**

4. **Фукалов, А. А.** Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тяжелых тел с центральной и осевой симметрией и их приложения / **А. А. Фукалов**, А. В. Кутергин // Вестник Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4-4. – С. 1831–1833. **Перечень ВАК РФ.**

5. Зайцев, А. В. Механизмы начального разрушения железобетонной крепи сферической горной выработки в массиве осадочных пород / А. В. Зайцев, Ю. В. Соколкин, **А. А. Фукалов** // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2013. – № 4. – С. 59–74. **Базы Scopus.**

6. Зайцев, А. В. Равновесие жестко закрепленных по внешней поверхности тяжелых упругих анизотропных тел с центральной симметрией в поле гравитационных сил / А. В. Зайцев, Ю. В. Соколкин, **А. А. Фукалов** // Вестник Кыргызско-Российского Славянского ун-та. – 2017. – Т 1, № 8. – С. 13–17. **Перечень ВАК РФ.**

7. Zaitsev, A. V. Initial strength analysis of anisotropic concrete supports for spherical mine workings in a sedimentary rock mass / A. V. Zaitsev, Yu. V. Sokolkin, **A. A. Fukalov** // Physical and mathematical modeling of Earth and environment processes (2018): 4th Int. Sci. School for Young Scientists, Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS / Eds. V. Karev, D. Klimov and K. Pokazeev. Cham: Springer Nature Switzerland AG/Springer, 2019. – P. 463–471. **Базы Web of Science.**

8. Зайцев, А. В. Решение задачи Ламе для составных трансверсально-изотропных сфер с общим центром / А. В. Зайцев, Ю. В. Соколкин, **А. А. Фукалов** // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Физико-математические науки. – 2021. – Т. 25, № 1. – С. 83–96. **Базы Web of Science.**

9. **Фукалов, А. А.** Равновесие жесткозакрепленной на внешней поверхности полый трансверсально-изотропной толстостенной сферы, находящейся под действием равномерного внутреннего давления и гравитационных сил / **А. А. Фукалов**, А. В. Зайцев, Ю. В. Соколкин, Ю. В. Баяндин // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Физико-математические науки. – 2021. – Т. 25, № 2. – С. 303–319. **Базы Web of Science.**

10. Zaitsev, A. V. Initial strength analysis of reinforced concrete monolithic supports for spherical and cylindrical mine workings / A. V. Zaitsev, A. V. Kutergin, **A. A. Fukalov**, A. S. Votinov, I. Yu. Kolytchev // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Sci. – 2022. – Vol. 1021. – 012060. doi:10.1088/1755-1315/1021/1/012060 **Базы Scopus.**

Подписано в печать ____ . ____ . 2022 года

Формат 60 x 90/16. Набор компьютерный.

Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ № _____.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии издательства
Пермского национального исследовательского политехнического университета

Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр-т, 29, к. 113.

Тел. (342) 219-80-33