На правах рукописи

АХМЕТШИНА Элеонора Газинуровна

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ КАК СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С УЧЕТОМ ВРЕМЕННЫХ СДВИГОВ

Специальность 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

САМАРА 2022

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет».

Научный руководитель:
Тарасов Вениамин Николаевич, заслуженный работник высшей школы РФ,
доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», заведующий кафедрой «Управление в технических системах» ФГБОУ ВО «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики».

Официальные оппоненты:

Титовцев Антон Сергеевич, доктор технических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет».

Лёзин Илья Александрович, кандидат технических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева».

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пензенский государственный технологический университет».

Защита диссертации состоится «22» декабря 2022 г. в 10.00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.377.02 на базе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» по адресу: г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, ауд. №200.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» по адресу: 443100, г. Самара, ул. Первомайская, 18.
Отзывы на автореферат (в двух экземплярах, заверенные печатью) просим направлять по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус, ученому секретарю диссертационного совета 24.2.377.02;
Тел. (846) 337-04-43, e-mail: zoteev-ve@mail.ru

Автореферат разослан «___» __________2022 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
24.2.377.02 ЗОТЕЕВ Владимир Евгеньевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию и разработке математических моделей и методов массового обслуживания на основе систем массового обслуживания (СМО) с сдвинутыми законами распределений $a(t\text{-}t_0)$, $b(t\text{-}t_0)$, где $t_0>0$ параметр сдвига. Такие системы в отличие от классических систем, назовем системами с временными сдвигами.

Впервые такая система в виде СМО M/M/1 со сдвинутыми вправо от нулевой точки экспоненциальными распределениями представлена в работе[1]. Этот факт заложил основу для исследования других систем с учетом временных сдвигов, которые по классификации Кендалла относятся к системам общего типа G/G/1. Ниже мы увидим, какими новыми свойствами обладают системы с учетом временных сдвигов.

Как в отечественной, так и в зарубежной литературе, включая интернет ресурсы, не имеется исследований других авторов в области систем с временными сдвигами. Единственными близкими работами в данной области следует выделить работы Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E., где представлены результаты приближения очередей к интернету и мобильным сервисам как очередей с запаздыванием во времени, но безотносительно к СМО. В этих работах показано, что, если информация задерживается достаточно долго, может произойти бифуркация Хопфа, которая может вызвать нежелательные колебания в очередях. Однако неизвестно, насколько велики колебания, когда происходит бифуркация Хопфа. Эти авторы почти приблизились к СМО с временными сдвигами.

Как известно, теория массового обслуживания (ТМО) включает известные классические СМО, сформированные двумя потоками, в которых временные интервалы поступления заявок и их обслуживания описываются известными из теории вероятностей функциями плотностей распределения, такими как: распределение Эрланга, экспоненциальное, гиперэкспоненциальное распределение как вероятностная смесь экспоненциальных распределений и т.д. В этой области известны работы многих отечественных и зарубежных авторов: Вишневский В.М., Цыбаков Б.С., Степанов С.Н., Алиев Т.И., L. Kleinrock, A.R. Ward, P.W. Glinn и многие другие.

Кроме классических СМО, теория массового обслуживания включает теорию систем общего типа G/G/1, из которой известно, что среднее время ожидания заявок в очереди $\overline{W}$ в любой СМО связано квадратичной зависимостью с коэффициентами вариаций интервалов поступления c_λ и времени обслуживания c_μ. Следовательно, диапазоны изменения этих коэффициентов вариаций играют важную роль в ТМО. Среднее время ожидания

[1] Тарасов В.Н. Бахарева Н.Ф., Блатов И.А. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, И.А. Блатов // Автоматика и телемеханика – 2015. – № 11. – С.51–59

заявок в очереди, это основная характеристика для систем массового обслуживания, т.к. все остальные временные характеристики: среднее время пребывания в системе, средняя длина очереди, количество заявок в системе являются производными от этой основной характеристики.

Также известно, что для систем G/G/1 нельзя получить решения для основной характеристики СМО – среднего времени ожидания заявок в очереди в общем случае. Поэтому важны и актуальны исследования таких систем для частных случаев законов распределений, а их результаты используются в современной теории телетрафика для моделирования систем передачи данных различного назначения. Например, по среднему времени ожидания в очереди, оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью СМО.

Разработка новых моделей массового обслуживания в виде систем с временными сдвигами является актуальной задачей для ТМО и имеет самостоятельное прикладное значение в моделировании различных систем передачи данных, например при использовании межсетевого экрана.

Целью диссертационной работы является разработка математических моделей систем передачи данных в виде СМО с сдвинутыми вправо от нулевой точки распределениями, методов их исследования и создание программного обеспечения для реализации этих моделей.

Основные задачи, решение которых необходимо для реализации цели:

1) исследование классических СМО, сформированных с помощью законов распределений Эрланга второго порядка (E_2), экспоненциального (M) и гиперэкспоненциального распределения второго порядка (H_2) с использованием метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли;

2) построение и исследование математических моделей указанных систем со сдвинутыми законами распределений, условно обозначенных E_2^-, M^-, H_2^-, включая определение спектральных разложений и вывод расчетных формул для основной характеристики СМО;

3) решение задачи определения неизвестных параметров сдвинутых законов распределений E_2^-, M^-, H_2^- и их числовых характеристик, а также оценка влияния на эти характеристики параметра сдвига закона распределения $t_0>0$;

4) разработка программы расчета среднего времени ожидания заявок в очереди для всех построенных моделей массового обслуживания со сдвинутыми вправо распределениями $E_2^-/E_2^-/1$, $E_2^-/M^-/1$, $M^-/E_2^-/1$, $H_2^-/H_2^-/1$, $H_2^-/M^-/1$ и $M^-/H_2^-/1$.

Объектом исследования являются СМО со сдвинутыми законами распределений.

Предметом исследования являются математические модели и методы анализа СМО с временными сдвигами.

Соответствие паспорту научной специальности.

Область исследований соответствует паспорту специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по пунктам: 1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений; 2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей; 3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

Методы исследования основаны на теории вероятностей, теории массового обслуживания и спектральном методе решения интегрального уравнения Линдли, теории случайных процессов, численных методов решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений, в том числе, реализованные в пакете Mathcad для проведения вычислительных экспериментов.

Научная новизна:

1. Впервые предложены спектральные разложения интегрального уравнения Линдли для шести пар СМО, сформированных обычными и сдвинутыми законами распределений Эрланга, экспоненциального и гиперэкспоненциального.

2. Впервые представлены численно-аналитические решения для среднего времени ожидания заявок в очереди как основной характеристики для рассматриваемых систем, полученные с помощью спектральных решений, и установлено, что СМО с сдвинутыми законами распределений обеспечивает многократное уменьшение времени ожидания в зависимости от величины параметра сдвига по сравнению с классическими системами.

3. Представлена методика расчета основной характеристики СМО, включающая определение неизвестных параметров сдвинутых законов распределений методом моментов через их числовые характеристики с учетом влияния на эти характеристики величины параметра сдвига закона распределения.

4. Впервые представлены результаты численных экспериментов над разработанными математическими моделями массового обслуживания для их тестирования и оценки их адекватности по разработанному программному обеспечению в среде Mathcad.

Все позиции соответствуют паспорту специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Практическая ценность работы состоит в следующем:

Использование представленных моделей массового обслуживания $E_2^-/E_2^-/1$, $E_2^-/M^-/1$, $M^-/E_2^-/1$, $H_2^-/H_2^-/1$, $H_2^-/M^-/1$ и $M^-/H_2^-/1$ со сдвинутыми вправо от нулевой точки распределениями обеспечивает меньшее время ожидания заявок в очереди по сравнению с системами с обычными законами распределений.

Разработанные методы и модели реализованы в виде программного комплекса «Программы расчета характеристик систем массового обслуживания с запаздыванием во времени в пакете Mathcad». Программа может быть использована проектными, научно-исследовательскими организациями при анализе и проектировании транспортной нагрузки в сетях связи, для анализа вероятностно-временных характеристик сетевого узла.

Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность полученных результатов исследований обеспечиваются согласованностью результатов вычислительных экспериментов с квадратичной зависимостью среднего времени ожидания от коэффициентов вариаций временных интервалов, что соответствует теории СМО G/G/1. С уменьшением параметра сдвига t_0 результаты экспериментов по тестированию представленных моделей систем с учетом временных сдвигов непрерывно приближаются к данным для классических систем, а при значении параметра сдвига t_0=0 полностью с ними совпадают.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для шести пар СМО, сформированных обычными и сдвинутыми законами распределений Эрланга, экспоненциального и гиперэкспоненциального.

2. Полученные с помощью спектральных решений численно-аналитические решения для среднего времени ожидания заявок в очереди как основной характеристики для рассматриваемых систем.

3. Методика расчета основной характеристики СМО, включающая определение неизвестных параметров сдвинутых законов распределений методом моментов через их числовые характеристики с учетом влияния на эти характеристики величины параметра сдвига закона распределения.

4. Результаты численных экспериментов над разработанными математическими моделями массового обслуживания, позволяющие утверждать: 1) СМО с временными сдвигами обеспечивают многократное уменьшение времени ожидания в зависимости от величины параметра сдвига по сравнению с классическими системами за счет уменьшения коэффициентов вариаций временных интервалов поступлений и обслуживания; 2) СМО с временными сдвигами обеспечивают интервальный диапазон изменения коэффициентов вариаций в отличие от классических систем с фиксированными значениями этих коэффициентов вариаций.

Реализация и внедрение. Программа для ЭВМ официально зарегистрирована свидетельством о государственной регистрации программ ЭВМ №2021614019 «Программный комплекс расчета характеристик систем массового обслуживания с запаздыванием во времени в пакете Mathcad». Результаты диссертационной работы внедрены и используются в проектной деятельности компании «ЭдМакс Консалтинг». Результаты работы также внедрены в учебном процессе дисциплины «Основы проектирования и моделирования вычислительных сетей» при подготовке магистрантов по направлениям подготовки 09.04.01 Информатика и вычислительная техника и 09.04.04 Программная инженерия.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы обсуждались в форме докладов на различных конференциях: Международная научно-техническая конференция (ПИТ-2019) Самарский научный центр РАН, (Самара, 2019), «Problems of Infocommunications Science and Technology» (PIC S&T), International Scientific-Practical Conference (Киев, Украина 2019), Международный научный форум «Наука и инновации – современные концепции» (Москва, 2021), Международная научно-практическая конференция «Инновационные идеи молодых исследователей (Уфа, 2021), XXVI Всероссийская научно-техническая конференция студентов, молодых ученых и специалистов «Новые информационные технологии в научных исследованиях НИТ-2021» (Рязань, 2021), XXIII Международная научно-техническая конференция «Проблемы техники и технологий телекоммуникаций» (Самара, 2021), XVI Международная отраслевая научно-техническая конференция «Технологии информационного общества» (Москва, 2022).

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликовано 18 работ, из них 8 из перечня ВАК, 1 в журналах из базы Scopus и 1 в журналах из базы Web of Science.

Личный вклад автора. Личный вклад автора заключается в совместной постановке задач, разработке методов исследования, интерпретации результатов и формулировка всех основных положений, выводов и рекомендаций, разработка программного обеспечения.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав заключения, библиографического списка и приложения. Объем работы: 129 страниц основного текста, 13 рисунков и 24 таблиц, приложение на 4 страницах.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обоснование актуальности темы исследования, ставится цель и соответствующие задачи для ее достижения; определяются новизна и практическая значимость результатов исследования.

В первой главе описана востребованность СМО при моделировании процессов функционирования телекоммуникационных и компьютерных сетей, транспортных потоков, логистики, сферы обслуживания населения и других процессов.

Проведен анализ литературных источников по теме научного исследования. Приводится обзор и сравнение методов моделирования различных систем на основе теории массового обслуживания. Отмечено, что механизм очередей задействован в любом сетевом устройстве и в качестве примера приведена схема образования очередей в пакетном коммутаторе.

Приведены основные результаты из теории массового обслуживания по классическим системам массового обслуживания, начиная с известной системы

M/M/1, формул Полячека-Хинчина для среднего времени ожидания заявок в очереди для систем M/G/1, формул Литтла и незавершенной формулы для среднего времени ожидания заявок в очереди в системах G/G/1. Эти данные в последующих главах сопоставляются с результатами для соответствующих разработанных моделей массового обслуживания со сдвинутыми законами распределений. Делается вывод о том, что классические СМО применимы только в случае фиксированных значений этих коэффициентов вариаций, что является серьёзным ограничением. Например, классическая система $E_2/E_2/1$ предполагает, что коэффициенты вариаций интервалов поступления c_λ и времени обслуживания c_μ, $c_\lambda = c_\mu = 1/\sqrt{2}$, а система M/M/1 применима при $c_\lambda = c_\mu = 1$. Разработанная нами модель системы с временными сдвигами $E_2^- / E_2^- / 1$ будет применима для диапазона изменения коэффициентов вариаций $c_\lambda, c_\mu \in (0, 1/\sqrt{2})$.

Сделаем вывод, что разработка новых моделей массового обслуживания со сдвинутыми законами распределений и разработка соответствующего программного обеспечения, расширяющие возможности классических систем как по области их применимости, так и по новым их свойствам, является актуальной задачей в ТМО, имеющей самостоятельное значение.

Вторая глава посвящена разработке математических моделей СМО, в которых в качестве входных распределений выступают нормированные распределения Эрланга второго порядка. По таким системам при обзоре научной литературы данные о их исследованиях не найдены. Нормированное распределение Эрланга отличается от обычного закона Эрланга как частного случая более общего Гамма распределения с функцией плотности $f(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}$. Разница между ними заключается в том, что у нормированного распределения математическое ожидание не зависит от порядка распределения *k*, следовательно, они отличаются числовыми характеристиками.

Рассмотрим вначале пару систем: $E_2/E_2/1$ с обычными нормированными распределениями Эрланга второго порядка и $E_2^- / E_2^- / 1$ с сдвинутыми вправо этими же распределениями и более подробно продемонстрируем построение моделей и использование метода спектрального решения уравнения Линдли в этом случае. Для системы $E_2/E_2/1$ законы распределения интервалов между соседними требованиями входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида:

$$a(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t},\ b(t) = 4\mu^2 t e^{-2\mu t}. \qquad (1)$$

Для системы $E_2^- / E_2^- / 1$ эти же законы распределения имеют вид:

$$a(t) = 4\lambda^2 (t - t_0) e^{-2\lambda(t - t_0)},\ b(t) = 4\mu^2 (t - t_0) e^{-2\mu(t - t_0)}. \qquad (2)$$

Преобразования Лапласа функций (1) будут соответственно:

$$A^*(s)=\left(\frac{2\lambda}{2\lambda+s}\right)^2;\ B^*(s)=\left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2.$$

Тогда спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для системы $E_2/E_2/1$: $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1=\psi_+(s)/\psi_-(s)$ примет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\left(\frac{2\lambda}{2\lambda-s}\right)^2\left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2-1=\frac{-s[s^2+2(\mu-\lambda)s-8\lambda\mu][s+2(\mu-\lambda)]}{(2\lambda-s)^2(2\mu+s)^2} \qquad (3)$$

Квадратный трехчлен числителя разложения $s^2+(2\mu\text{-}\lambda)s-8\lambda\mu$ имеет один отрицательный корень и один положительный, которые для удобства обозначим $-s_1$ и s_3 , При условии стабильности системы $\lambda<\mu$, т.е. $(\mu\text{-}\lambda)>0$.

$$-s_1=-(\mu\text{-}\lambda)-\sqrt{(\mu\text{-}\lambda)^2+8\lambda\mu},\ s_3=-(\mu\text{-}\lambda)+\sqrt{(\mu\text{-}\lambda)^2+8\lambda\mu}.$$

Тогда нули числителя разложения $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ будут

$$s=0;\ -s_1=-(\mu\text{-}\lambda)-\sqrt{(\mu\text{-}\lambda)^2+8\lambda\mu};\ -s_2=-2(\mu\text{-}\lambda),\ s_3=-(\mu\text{-}\lambda)+\sqrt{(\mu\text{-}\lambda)^2+8\lambda\mu}$$

(два отрицательных корня и один положительный корень). Полюсы разложения $\psi_+(s)/\psi_-(s)$: $s=2\lambda,\ s=-2\mu$. Теперь с учетом условий построения функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ будем иметь: $\psi_+(s)=\dfrac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(2\mu+s)^2}$; $\psi_-(s)=-\dfrac{(2\lambda-s)^2}{(s-s_3)}$.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу *K*, физически означающую вероятность того, что поступающая заявка застает систему свободной:

$$K=\lim_{s\to 0}\frac{\psi_+(s)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{(s+s_1)(s+s_2)}{(2\mu+s)^2}=\frac{s_1s_2}{4\mu^2},$$

где s_1, s_2 – абсолютные значения корней числителя разложения.

Преобразование Лапласа функции распределения времени ожидания

$$\Phi_+(s)=\frac{K}{\psi_+(s)}=\frac{s_1s_2(2\mu+s)^2}{4\mu^2 s(s+s_1)(s+s_2)}.$$

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания:

$$W^*(s)=s\cdot\Phi_+(s)=\frac{s_1s_2(2\mu+s)^2}{4\mu^2(s+s_1)(s+s_2)}. \qquad (4)$$

Первая производная от функции $W^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$ и дает нам среднее время ожидания заявок в очереди для системы $E_2/E_2/1$:

$$\bar{W}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}-\frac{1}{\mu}, \qquad (5)$$

где корни числителя разложения s_1, s_2 определяются через параметры распределений (1). Для практического применения расчетной формулы (5) определим параметры распределений (1) λ и μ по методу моментов из выражений

$$\bar{\tau}_\lambda=1/\lambda,\ \bar{\tau}_\mu=1/\mu.$$

Заметим, что система $E_2/E_2/1$ применима при $c_\lambda = c_\mu = 1/\sqrt{2}$.

Теперь перейдем к рассмотрению системы с временными сдвигами $E_2^-/E_2^-/1$, описываемой функциями плотности (2). Преобразования Лапласа функций (2) будут соответственно: $A^*(s) = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda + s}\right)^2 \cdot e^{-st_0}$; $B^*(s) = \left(\frac{2\mu}{2\mu + s}\right)^2 \cdot e^{-st_0}$.

Тогда спектральное разложение для системы $E_2^-/E_2^-/1$ $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ примет вид (3) как и для обычной системы $E_2/E_2/1$, так как показатели степеней у экспонент с противоположными знаками обнуляются. Таким образом, заключаем, что спектральное разложение инвариантно к операции сдвига закона распределения. Следовательно, для системы с временными сдвигами расчетная формула среднего времени ожидания также сохраняется, только будут изменены ее параметры вследствие операции сдвига. Неизвестные параметры распределений (2) определяются методом моментов через числовые характеристики.

Для нормированного распределения Эрланга второго порядка числовые характеристики (средние значения и коэффициенты вариаций) интервалов поступлений и времени обслуживания имеют вид:

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{1}{\lambda} + t_0,\ \bar{\tau}_\mu = \frac{1}{\mu} + t_0,\ c_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \lambda t_0)},\ c_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \mu t_0)}. \qquad (6)$$

Следовательно, коэффициенты вариаций для распределения E_2^- – c_λ и c_μ уменьшаются при сдвиге соответственно в $(1 + \lambda t_0)$ и $(1 + \mu t_0)$ раз по сравнению с распределением E_2, что, в свою очередь, влечет многократное уменьшение среднего времени ожидания из-за его квадратичной зависимости от c_λ и c_μ. Коэффициенты вариаций c_λ и c_μ взаимосвязаны через параметр сдвига t_0, так как в (6) мы имеем четыре уравнения с тремя неизвестными и эта зависимость легко прослеживается в численных экспериментах.

Задавая в качестве входных параметров для расчета системы $E_2^-/E_2^-/1$ полученные выше значения $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu$, а также параметр сдвига t_0 из выражений моментов (6), определяем параметры λ, μ и корни s_1, s_2 числителя разложения как функции t_0. Далее используем расчетную формулу (5) и рассчитаем среднее время ожидания для диапазонов изменения коэффициентов вариаций $c_\lambda \in \left(0,\ 1/\sqrt{2}\right)$ и $c_\mu \in \left(0, 1/\sqrt{2}\right)$, определяемыми соотношениями (6) соответственно в зависимости от величины параметра сдвига $0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu$ (табл.1).

Результаты табл.1 получены для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 0{,}9$. Коэффициент загрузки ρ определяется отношением средних интервалов $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$ также, как и в имитационном моделировании систем массового обслуживания. Расчеты, приведенные в таблице, проведены для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$.

Таблица 1 – Результаты численных экспериментов для СМО $E_2^- / E_2^- / 1$ и $E_2/E_2/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
ρ	c_λ	c_μ	t_0	для СМО $E_2^- / E_2^- / 1$	для СМО $E_2/E_2/1$
0,1	0,637	0,007	0,99	0,0000	0,017
	0,672	0,354	0,5	0,002	
	0,700	0,636	0,1	0,013	
	0,706	0,700	0,01	0,016	
0,5	0,357	0,007	0,99	0,0000	0,390
	0,530	0,354	0,5	0,081	
	0,672	0,636	0,1	0,309	
	0,704	0,700	0,01	0,382	
0,9	0,077	0,007	0,99	0,0001	4,359
	0,389	0,354	0,5	1,057	
	0,643	0,636	0,1	3,519	
	0,701	0,700	0,01	4,271	

С уменьшением параметра сдвига t_0 среднее время ожидания в СМО $E_2^- / E_2^- / 1$ стремится к его значению в обычной системе $E_2/E_2/1$. На основе полученных результатов для систем $E_2/E_2/1$ и $E_2^- / E_2^- / 1$ сформулируем общее утверждение для всех систем с преобразуемыми по Лапласу функциями плотности с учетом временных сдвигов с целью сокращения дальнейших математических выкладок.

Утверждение. Спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ для всех систем с временными сдвигами, сформированных преобразуемыми по Лапласу функциями плотности $a(t\text{-}t_0)$ и $b(t\text{-}t_0)$, полностью совпадают со спектральными разложениями для соответствующих обычных систем, т.е. спектральное разложение инвариантно к операции сдвига во времени функции плотности.

Следствие. Расчетные формулы для среднего времени ожидания для всех таких систем будут иметь такой же вид, как у соответствующих систем с обычными распределениями, но с их измененными параметрами вследствие операции сдвига во времени. Коэффициенты вариаций

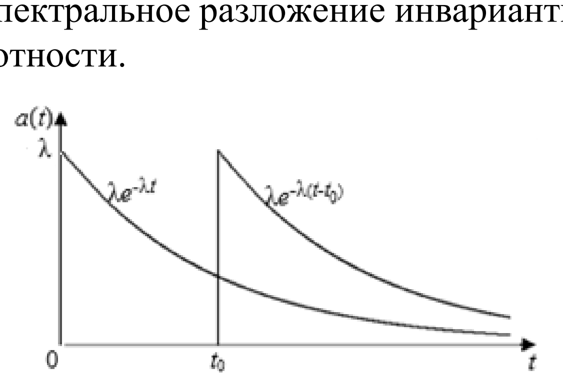

Рис. 1. Пример сдвинутого распределения

c_λ и c_μ будут функционально взаимосвязаны через параметр сдвига. Таким образом, среднее время ожидания для систем с временными сдвигами фактически зависит от величины параметра сдвига $t_0 > 0$, что наглядно демонстрируют данные табл.1.

Системы массового обслуживания M/E$_2$/1 и $\mathbf{M^- / E_2^- / 1}$.

СМО M/E$_2$/1 и $M^-/E_2^-/1$ описываются соответствующими функциями плотности

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ b(t) = 4\mu^2 t e^{-2\mu t}, \quad (7)$$

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda(t-t_0)},\ b(t) = 4\mu^2 (t-t_0) e^{-2\mu(t-t_0)}. \quad (8)$$

Спектральное разложение для этой пары систем будет иметь вид:

$$A^*(-s)B^*(s) - 1 = \frac{\lambda}{\lambda - s}\cdot\left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2 - 1 = \frac{s\left[s^2 + (4\mu-\lambda)s + 4\mu(\mu-\lambda)\right]}{(\lambda-s)(2\mu+s)^2}.$$

В случае стабильной системы при 0<ρ<1 числитель разложения имеет два действительных отрицательных корня, которые для удобства обозначим $-s_1$, $-s_2$. Тогда компоненты разложения будут $\psi_+(s) = \dfrac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(2\mu+s)^2}$, $\psi_-(s) = \lambda - s.$

Преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания для системы M/E$_2$/1 имеет вид

$W^*(s) = \dfrac{s(1-\rho)(2\mu+s)^2}{(s-\lambda)(2\mu+s)^2 + 4\lambda\mu^2} = \dfrac{(1-\rho)(2\mu+s)^2}{(s+s_1)(s+s_2)}$, что дает нам после несложных преобразований следующую расчетную формулу для среднего времени ожидания

$$\bar{W} = \frac{3\rho}{4\mu(1-\rho)}, \quad (9)$$

где ρ – коэффициент загрузки $0 < \rho = \lambda/\mu < 1$. Очевидно, что параметры λ, μ и корни s_1, s_2 числителя разложения будут функциями t_0. Определим эти параметры через числовые характеристики. Для распределения M^- числовые характеристики равны $\bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0$, $c_\lambda = (1+\lambda t_0)^{-1}$, а для распределения E_2^-: $\bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0$, $c_\mu = \left[\sqrt{2}(1+\mu t_0)\right]^{-1}$. Тогда параметр сдвига t_0 входит в формулу (9) неявно через параметры λ и μ, а коэффициенты вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания будут взаимосвязаны через параметр сдвига. Область применимости системы $M^-/E_2^-/1$ будет определяться диапазонами изменения коэффициентов вариаций $c_\lambda \in (0,\ 1)$ и $c_\mu \in \left(0, 1/\sqrt{2}\right)$.

Системы массового обслуживания E$_2$/M/1 и $\mathbf{E_2^- / M^- / 1}$.

СМО E$_2$/M/1 и $E_2^-/M^-/1$ описываются соответствующими функциями плотности:

$$a(t)=4\lambda^2 te^{-2\lambda t},\ b(t)=\mu e^{-\mu t}, \tag{10}$$

$$a(t)=4\lambda^2(t-t_0)e^{-2\lambda(t-t_0)},\ b(t)=\mu e^{-\mu(t-t_0)}. \tag{11}$$

Спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для системы $E_2/M/1$ будет иметь вид:

$$A^*(-s)B^*(s)-1=\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\left[\frac{\mu A^*(-s)-s-\mu}{s(s+s_1)}\right]\left[\frac{s(s+s_1)}{s+\mu}\right],$$

где $s=-s_1$ – единственный отрицательный корень уравнения $s+\mu-\mu A^*(-s)=0$, $A^*(-s)=\left(\frac{2\lambda}{2\lambda\text{-}s}\right)^2$. Компоненты разложения $\psi_+(s)=\frac{s(s+s_1)}{s+\mu}$, $\psi_-(s)=-\frac{(2\lambda-s)^2}{s-s_2}$, где $-s_1=-(\mu-4\lambda)/2-\sqrt{[(\mu-4\lambda)/2]^2+4\lambda(\mu-\lambda)}$, $s_2=(4\lambda-\mu)/2+\sqrt{[(\mu-4\lambda)/2]^2+4\lambda(\mu-\lambda)}$ – отрицательный и положительный корни числителя разложения.

Преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания для системы $E_2/M/1$ имеет вид $W^*(s)=\frac{s_1(s+\mu)}{\mu(s+s_1)}$, что дает среднее время ожидания в виде расчетной формулы

$$\bar{W}=\frac{1}{s_1}-\frac{1}{\mu}. \tag{12}$$

Для практического применения формулы (12) к системе $E_2^-/M^-/1$ надо определить ее параметры с учетом сдвига законов распределений. Для этого запишем выражения для числовых характеристик распределений (10) и (11):

$$\bar{\tau}_\lambda=\lambda^{-1}+t_0,\ \bar{\tau}_\mu=\mu^{-1}+t_0,\ c_\lambda=[\sqrt{2}(1+\lambda t_0)]^{-1},\ c_\mu=1/(1+\mu t_0). \tag{13}$$

Теперь, задав в качестве входных параметров для расчета системы $E_2^-/M^-/1$ значения $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu$, а также параметр сдвига t_0, можно рассчитать среднее время ожидания по выражению (12) для диапазонов изменения коэффициентов вариаций $c_\lambda\in(0,\ 1/\sqrt{2})$ и $c_\mu\in(0,1)$, определяемыми выражениями (13) в зависимости от величины параметра сдвига $0<t_0<\bar{\tau}_\mu$.

Третья глава посвящена разработке математических моделей для пары систем $H_2/H_2/1$ и $H_2^-/H_2^-/1$ с гиперэкспоненциальными распределениями второго порядка. В СМО $H_2/H_2/1$ интервалы между соседними заявками входного потока и времени обслуживания распределены по законам:

$$a(t)=p\lambda_1e^{-\lambda_1 t}+(1-p)\lambda_2e^{-\lambda_2 t},\ b(t)=q\mu_1e^{-\mu_1 t}+(1-q)\mu_2e^{-\mu_2 t}. \tag{14}$$

Для системы $H_2^-/H_2^-/1$ сдвинутые законы заданы соответствующими функциями плотности:

$$a(t)=p\lambda_1e^{-\lambda_1(t-t_0)}+(1-p)\lambda_2e^{-\lambda_2(t-t_0)},\ b(t)=q\mu_1e^{-\mu_1(t-t_0)}+(1-q)\mu_2e^{-\mu_2(t-t_0)}. \tag{15}$$

Здесь во всех выражениях функций плотности вероятности $p,q\in[0,1]$.

Спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для систем $H_2/H_2/1$ и $H_2^-/H_2^-/1$ принимает следующий вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{(a_0 - a_1 s)(b_0 + b_1 s) - (\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}.$$

Из многочлена 4-й степени числителя разложения удается выделить многочлен 3-й степени

$$s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0 \qquad (16)$$

с коэффициентами $c_2 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2$, $c_1 = -a_1 b_1 - a_0 - b_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2)$, $c_0 = -\lambda_1\lambda_2\left[\mu_1(1-q) + \mu_2 q\right] + \mu_1\mu_2\left[\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p\right]$. Как показало исследование, многочлен (16) в случае стабильной системы имеет два действительных отрицательных корня $-s_1$ и $-s_2$ или же два комплексно сопряженных с отрицательными вещественными частями $-s_1$, $-s_2$ и один положительный корень s_3. Тогда компоненты спектрального разложения будут иметь вид: $\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)}$, $\psi_-(s) = \frac{(s-\lambda_1)(\lambda_2 - s)}{s - s_3}$. Далее строим преобразование Лапласа для функции плотности времени ожидания $W^*(s) = \frac{s_1 s_2 (s+\mu_1)(s+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(s+s_1)(s+s_2)}$, что дает расчетную формулу для среднего времени ожидания для этой пары систем:

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}. \qquad (17)$$

Для практического применения формулы (17) к системе $H_2^-/H_2^-/1$ надо определить ее параметры с учетом сдвига законов распределений. Для этого запишем полученные в работе выражения для числовых характеристик распределений (15): средний интервал поступлений $\bar{\tau}_\lambda = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0$, второй начальный момент $\overline{\tau_\lambda^2} = 2p\lambda_1^{-2} + 2(1-p)\lambda_2^{-2} + t_0^2 + 2t_0[p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1}]$, квадрат коэффициента вариации $c_\lambda^2 = \frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}$. Аналогичные уравнения моментов относительно распределения времени обслуживания получим заменой символа λ на μ.

Для определения трех неизвестных параметров λ_1, λ_2 и p распределения H_2^-, исходя из вида равенства $\bar{\tau}_\lambda = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0$, положим $\lambda_1 = 2p/(\bar{\tau}_\lambda - t_0)$, $\lambda_2 = 2(1-p)/(\bar{\tau}_\lambda - t_0)$ и подставив их в выражение для квадрата коэффициента вариации, получим уравнение 4-й степени относительно p. Отбросив тривиальные решения p=0 и p=1, из оставшегося квадратного уравнения определим $p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{2[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2]}}$. Аналогично для второго закона распределения заменой символа λ на μ, получим выражения для неизвестных параметров μ_1, μ_2 и q. Тогда, задавая в качестве входных параметров значения

$\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu$, а также параметр сдвига t_0, можно рассчитать среднее время ожидания по выражению (17) для диапазонов изменения коэффициентов вариаций $c_\lambda \in (0, \infty)$ и $c_\mu \in (0, \infty)$ в зависимости от величины параметра сдвига $0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu$.

Область применимости системы $H_2^- / H_2^- / 1$ будет определяться не отрицательностью двух подкоренных выражений для вероятностей p и q, из чего следуют ограничения, которые необходимо учитывать при расчетах

$$c_\lambda \geq 1 - t_0 / \bar{\tau}_\lambda;\ c_\mu \geq 1 - t_0 / \bar{\tau}_\mu, \text{ при } 0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu. \qquad (18)$$

Заметим, что значения параметров c_λ и c_μ в системе $H_2^- / H_2^- / 1$ изменяются согласно выражениям, приведенным выше и уменьшаются соответственно в $1 + \frac{t_0 \lambda_1 \lambda_2}{[\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p]}$ и $1 + \frac{t_0 \mu_1 \mu_2}{[\mu_1(1-q) + \mu_2 q]}$ раз по сравнению с обычной системой $H_2/H_2/1$.

В диссертационной работе исследованы также особенности распределений H_2 и H_2^-, одна из которых состоит в том, что эти распределения однозначно можно определить с помощью двух начальных моментов, а также – трех начальных моментов. Выше мы привели описание этих законов распределений с помощью двух начальных моментов. При аппроксимации с помощью трех начальных моментов необходимо решение системы трех нелинейных уравнений. В работе показано, что при аппроксимации с помощью двух начальных моментов среднее время ожидания несколько занижается по сравнению с использованием трех моментов.

Четвертая глава посвящена описанию построенных математических моделей двух пар систем: $H_2/M/1$, $H_2^- / M^- / 1$, $M/H_2/1$ и $M^- / H_2^- / 1$. Приведем вкратце основные результаты по этим системам.

Для системы $H_2^- / M^- / 1$ спектральное разложение имеет вид $\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s\left(s^2 - l_1 s - l_0\right)}{(s-\lambda_1)(\lambda_2 - s)(\mu + s)} = \frac{-s(s+\sigma_1)(s-\sigma_2)}{(s-\lambda_1)(\lambda_2-s)(\mu+s)}$, где $-\sigma_1 = l_1/2 - \sqrt{l_1^2/4 + l_0}$ – отрицательный корень, $\sigma_2 = l_1/2 + \sqrt{l_1^2/4 + l_0}$ – положительный корень многочлена $s^2 - l_1 s - l_0$ с коэффициентами $l_0 = \mu\left[\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p\right] - \lambda_1\lambda_2$ и $l_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu$.

Тогда компоненты спектрального разложения будут иметь вид:

$$\psi_+(s) = \frac{s(s+\sigma_1)}{s+\mu},\ \psi_-(s) = -\frac{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}{s-\sigma_2}.$$

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания примет вид

$W^*(s) = s \cdot \Phi_+(s) = \frac{\sigma_1(s+\mu)}{\mu(s+\sigma_1)}$, что дает среднее время ожидания заявок в очереди в системах $H_2/M/1$ и $H_2^- / M^- / 1$ в виде формулы

$$\bar{W} = \frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\mu}. \qquad (19)$$

Для практического применения формулы (19) к расчету СМО $H_2^- / M^- / 1$ запишем параметры законов распределений, входящие в коэффициенты многочлена разложения, зависящие от параметра сдвига:

$$\lambda_1 = 2p / (\bar{\tau}_\lambda - t_0), \quad \lambda_2 = 2(1-p) / (\bar{\tau}_\lambda - t_0), \quad p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{2[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2]}}, \quad \mu = (\bar{\tau}_\mu - t_0)^{-1},$$

$t_0 = \bar{\tau}_\mu (1 - c_\mu)$. Теперь, задавая в качестве входных параметров значения $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu$ и параметр сдвига t_0, можно рассчитать среднее время ожидания по выражению (19) для диапазонов изменения коэффициентов вариаций $c_\lambda \in (0, \infty)$ и $c_\mu \in (0, 1)$ в зависимости от величины параметра сдвига $0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu$. Здесь выражение для вероятности p задает ограничение по области применимости системы $H_2^- / M^- / 1$: $c_\lambda \geq 1 - t_0 / \bar{\tau}_\lambda$.

Для системы $M^- / H_2^- / 1$ спектральное разложение имеет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{s\left(s^2 + h_1 s + h_0\right)}{(\lambda - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)} = \frac{s(s + z_1)(s + z_2)}{(\lambda - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)},$$

где $-z_1 = -(h_1 / 2 - \sqrt{h_1^2 / 4 - h_0})$, $-z_2 = -(h_1 / 2 + \sqrt{h_1^2 / 4 - h_0})$ два различных действительных отрицательных корня многочлена $s^2 + h_1 s + h_0$ с коэффициентами $h_0 = \mu_1 \mu_2 - \lambda[(1\text{-}q)\mu_1 + q\mu_2]$ и $h_1 = \mu_1 + \mu_2 - \lambda$, выражающимися через параметры распределений системы.

Компоненты спектрального разложения:

$$\psi_+(s) = \frac{s(s + z_1)(s + z_2)}{(s + \mu_1)(s + \mu_2)}, \quad \psi_-(s) = \lambda - s.$$

Преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания в системах M/H$_2$/1 и $M^-/H_2^-/1$: $W^*(s) = s \cdot \Phi_+(s) = \frac{z_1 z_2}{\mu_1 \mu_2} \frac{(s + \mu_1)(s + \mu_2)}{(s + z_1)(s + z_2)}$, что дает среднее время ожидания в очереди

$$\bar{W} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} - \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}. \qquad (20)$$

Параметры распределений, найденные методом моментов, будут:

$$\lambda = 1 / (\bar{\tau}_\lambda - t_0), \; \mu_1 = 2q / (\bar{\tau}_\mu - t_0), \; \mu_2 = 2(1-q) / (\bar{\tau}_\mu - t_0), \; q = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\bar{\tau}_\mu - t_0)^2}{2[(\bar{\tau}_\mu - t_0)^2 + c_\mu^2 \bar{\tau}_\mu^2]}}.$$

Входные параметры $\bar{\tau}_\mu, c_\mu, t_0$ связаны ограничением $c_\mu \geq 1 - t_0 / \bar{\tau}_\mu$ при $0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu$.

Теперь, задав в качестве входных параметров для расчета системы $M^-/H_2^-/1$ приведенные выше значения $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu, t_0$ и определив абсолютные значения

z_1, z_2 отрицательных корней числителя спектрального разложения, рассчитывается среднее время ожидания по выражению (20) для диапазонов изменения коэффициентов вариаций $c_\lambda \in (0, 1)$ и $c_\mu \in (0, \infty)$ в зависимости от величины параметра сдвига $t_0 > 0$.

Пятая глава посвящена описанию разработанного комплекса программ в среде Mathcad для расчета основной характеристики представленных моделей массового обслуживания с учетом временных сдвигов.

В заключении обобщены основные теоретические и практические результаты диссертационной работы.

В приложениях приведены свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, акты о внедрении и использовании результатов диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В диссертации решена принципиально новая научно-техническая задача, заключающаяся в разработке и исследовании математических моделей массового обслуживания со сдвинутыми законами распределений, расширяющих возможности классических систем массового обслуживания.

Основные результаты состоят в следующем:

1. Впервые предложены спектральные разложения интегрального уравнения Линдли для шести пар СМО, сформированных обычными и сдвинутыми законами распределений Эрланга, экспоненциального и гиперэкспоненциального. При этом шесть систем с временными сдвигами обеспечивают коэффициенты вариаций интервалов поступлений и обслуживания как меньшие, так и большие 1. Представленные модели с учетом временных сдвигов расширяют возможности классических систем.

2. Впервые представлены численно-аналитические решения для среднего времени ожидания заявок в очереди как основной характеристики для рассматриваемых систем, полученные с помощью спектральных решений и установлено, что СМО с сдвинутыми законами распределений обеспечивает многократное уменьшение времени ожидания в зависимости от величины параметра сдвига по сравнению с классическими системами. Полученные расчетные формулы зависят от параметра сдвига законов распределений, следовательно, учитывая формулы Литтла, связывающие другие временные характеристики СМО с средним временем ожидания, параметр сдвига t_0 в представленных моделях можно считать регулирующим параметром временных характеристик СМО.

Получено, что для системы $\mathrm{H}_2^- / \mathrm{M}^- / 1$ при ρ=0,9 и параметре сдвига t_0=0,99 коэффициент вариации c_λ уменьшается с 2,0 для обычной системы H_2/M/1 до значения 1,109 для системы $\mathrm{H}_2^- / \mathrm{M}^- / 1$, а c_μ уменьшается с 1,0 для системы

$H_2/M/1$ до значения 0,01 для системы $H_2^-/M^-/1$. Среднее время ожидания при этом уменьшается с 22,41 до 0,002 единиц времени, т.е. практически до нуля. Аналогично обстоит дело для всех предложенных моделей с временными сдвигами.

3. Представлена методика расчета основной характеристики СМО, включающая определение неизвестных параметров сдвинутых законов распределений методом моментов через их числовые характеристики с учетом влияния на эти характеристики величины параметра сдвига закона распределения. Характер такого влияния однозначно продемонстрировано на примерах уравнений моментов.

4. Впервые представлены результаты численных экспериментов для разработанных математических моделей массового обслуживания при их тестировании и оценки их адекватности по разработанному программному обеспечению. Результаты экспериментов полностью подтверждают сделанные в диссертационной работе предположения о свойствах и возможностях новых моделей массового обслуживания.

Три компонента паспорта специальности: математическое моделирование, численные методы и комплексы программ в диссертационной работе отражены следующим образом. Математическое моделирование в работе представлено широко в виде моделей массового обслуживания. Численные методы представлены методами решения систем нелинейных уравнений и методами определения корней полиномов в числителе спектральных разложений в среде Mathcad. Представлен комплекс программ расчета основной характеристики СМО в среде Mathcad.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Ахметшина, Э.Г. Система массового обслуживания $E_2/M/1$ с обычными и сдвинутыми входными распределениями / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина, Н.Ф. Бахарева // Инфокоммуникационные технологии. – 2018. – №4. – С. 387–393.
2. Ахметшина, Э.Г. Анализ новой системы массового обслуживания $E_2/E_2/1$ с запаздыванием / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина, Н.Ф. Бахарева // Инфокоммуникационные технологии. – 2018. – №3. – С. 277-282.
3. Ахметшина, Э.Г. Модели телетрафика на основе современной теории массового обслуживания / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина, Н.Ф. Бахарева // Инфокоммуникационные технологии. – 2018. – №1. – С. 68-74.
4. Ахметшина, Э.Г. Модели телетрафика на основе двойственных систем с гиперэкспоненциальными и эрланговскими распределениями / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина, Н.Ф. Бахарева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». – 2019. – №3. – С. 57- 67.
5. Ахметшина, Э.Г. Особенности применения гиперэкспоненциальных и гиперэрланговских входных распределений в системах массового обслуживания / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина, О. Када // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». – 2019. – №1. – С. 34-44.

6. Ахметшина, Э.Г. Исследование двух систем массового обслуживания $M/E_2/1$ с обычными и со сдвинутыми входными распределениями / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина, Н.Ф. Бахарева // Инфокоммуникационные технологии. – 2020. – №1. – С. 33-38.

7. Ахметшина, Э.Г. Модели телетрафика на основе двойственных систем с запаздыванием с гиперэкспоненциальными и экспоненциальными распределениями / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина, Н.Ф. Бахарева // Информационные технологии. – 2020. – №4. – С.195-202.

8. Akhmetshina, E.G. Modeling data transmission systems using modern information technologies / Э.Г. Ахметшина // T-Comm Телекоммуникации и транспорт. – 2021. – №8. – С.52-57.

Публикации в изданиях, индексируемых в международных базах данных WoS и Scopus

9. Ахметшина, Э.Г. Среднее время ожидания в системе массового обслуживания $H_2/H_2/1$ с запаздыванием / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2018. – Т.22. – №4. – С. 702–713. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1607

10. Akhmetshina, E. Properties of hyperexponential and hypererlangian distributions / V. Tarasov, E. Akhmetshina, O. Kada // 2019 IEEE International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications, Science and Technology (PIC S&T). – 2019. Pp.895-898 DOI: 10.1109/PICST47496.2019.9061538

Публикации в других изданиях

11. Ахметшина, Э.Г. Системы массового обслуживания с эрланговскими входными распределениями / Э.Г. Ахметшина // Материалы международной научно-технической конференции под ред. С.А. Прохорова, Самара, 2019 г. С. 523-527.

12. Ахметшина, Э.Г. Моделирование систем передачи данных с помощью современных информационных технологий / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина // Сборник научных статей по итогам работы Международного научного форума «Наука инновации – современные концепции», Москва, 2021 г. С.89-95.

13. Ахметшина, Э.Г. Распознавание законов распределений по данным запросов к веб сайту / О.Када, Э.Г. Ахметшина // Материалы VI Международной научно-практической конференции «Инновационные идеи молодых исследователей», Уфа, 2021 г. С. 30-34.

14. Ахметшина, Э.Г. Обработка очереди запросов к веб сайту приемной кампании вуза / О.Када, Э.Г. Ахметшина // Материалы XXVI Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов «Новые информационные технологии в научных исследованиях НИТ-2021», Рязань, 2021 г. С.53-54.

15. Ахметшина, Э.Г. Аппроксимация данных по запросам к веб сайту ABITUR.PSUTI.RU / О. Када, Э.Г. Ахметшина // Материалы XXIII Международной научно-технической конференции «Проблемы техники и технологий телекоммуникаций 2021», Самара, 2021 г. С. 187-188.

16. Ахметшина, Э.Г. Модели систем передачи данных на основе новых СМО / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина // Материалы XXIII Международной научно-технической конференции «Проблемы техники и технологий телекоммуникаций 2021», Самара, 2021 г. С. 193-194.

17. Akhmetshina, E.G. Analysis of requests data to the site of reception company PSUTI / O. Kada, E.G. Akhmetshina // Сборник трудов XVI Международной отраслевой научно-технической конференции «Технологии информационного общества», Москва, 2022 г. С.38-39.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

18. Ахметшина, Э.Г. Программный комплекс расчета характеристик систем массового обслуживания с запаздыванием во времени в пакете Mathcad / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021613028, Роспатент, 18.03.2021.

Автореферат отпечатан с разрешения диссертационного совета 24.2.377.02
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»
(протокол № 8 от 17 октября 2022 г.)

Заказ №   . Тираж 110 экз.

Отпечатано на ризографе.
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»
Отдел типографии и оперативной полиграфии
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244