

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ  
ЭНЕРГЕТИКИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



Матвеев Александр Леонидович

**ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ В СРЕДАХ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ  
НЕОДНОРОДНОСТЯМИ И СОРБИРУЮЩИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

Специальность 01.04.14 - Теплофизика и теоретическая теплотехника

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук.

Научный руководитель: Кондратенко Петр Сергеевич  
доктор физ.-мат. наук, профессор

Официальные оппоненты: Крайнов Владимир Павлович  
доктор физ.-мат. наук, профессор  
Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет), профессор кафедры  
теоретической физики

Чукбар Константин Владимирович  
доктор физ.-мат. наук, доцент  
НИЦ «Курчатовский институт», главный  
научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего  
образования "Национальный  
исследовательский ядерный университет  
«МИФИ»"

Защита состоится 22 сентября 2022 года на заседании диссертационного совета Д 002.070.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук по адресу: 115191, г. Москва, ул. Б.Тульская, д. 52.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук <http://www.ibrae.ac.ru/contents/232/>

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
к.т.н.



В.Е.Калантаров

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Несмотря на то, что первые работы по диффузии были опубликованы ещё в позапрошлом веке, исследования процессов переноса примеси продолжают и сейчас интенсивно развиваться.

Из уравнения классической диффузии, вытекающего из законов Фика [1], следует, что размер области локализации примеси  $R(t)$  растёт пропорционально квадратному корню из времени. Эта зависимость реализуется, когда среда переноса является однородной.

В сильно неоднородных средах, которые часто встречаются на практике, возникают неклассические зависимости размера области локализации примеси от времени

$$R(t) \propto t^\gamma, \text{ где } \gamma \neq 1/2.$$

Если  $\gamma < 1/2$ , то режим переноса называют субдиффузионным, а при  $\gamma > 1/2$  – супердиффузионным. Для описания таких закономерностей было развито большое количество моделей в разных областях физики и не только. Так, перенос зарядов в полупроводниковых структурах [2-6], проникновение белков через клеточные мембраны [7-11], миграция примесей в пористых средах [12-13] описывался субдиффузионными режимами. Супердиффузионные режимы идентифицировались при движении микроорганизмов [14-15], распространении атомов и кластеров на поверхности твёрдых тел [16-17].

Особое положение в этом ряду занимают геологические среды [18], так как именно они рассматриваются в качестве места захоронения радиоактивных отходов, и знание закономерностей переноса радионуклидов в них исключительно важно для проведения оценок надёжности захоронений.

Приведенный выше далеко не полный перечень разделов знания, где встречаются неклассические процессы переноса, и беглый взгляд на историю их изучения (см. ниже Исторический обзор) свидетельствует о том, что эта тема исследований не только обширна, но и еще далека от своего завершения.

Режимы переноса, различаемые видом зависимости  $R(t)$ , и выбором моделей для их описания определяются распределением неоднородностей среды, иначе говоря, ее структурой. Обычно физическая модель переноса зависит от конечного набора параметров. Если они являются постоянными, то концентрация примеси в зависимости от координат и времени, как правило, дается аналитическим выражением. Однако, на практике помимо мелко- и среднемасштабных неоднородностей, определяющих выбор модели, среда обладает крупномасштабными неоднородностями, так что параметры модели зависят от координат. Простейший пример – уравнение диффузии с пространственно зависимым коэффициентом диффузии. В таком случае, решение задачи о переносе требует проведения трудоемких и время затратных численных расчетов. Отсюда возникает задача о построении аналитической

теории переноса примеси в средах, обладающих крупномасштабными неоднородностями.

Во многих случаях геологические среды содержат в себе сильно сорбирующие включения. Обычно они бывают редкими, но в силу своей специфики могут в существенной мере влиять на формирования режимов переноса. Описание процессов переноса в таких средах требует разработки отдельной модели.

Всё сказанное позволяет считать тему диссертации, посвященной переносу примеси в средах с крупномасштабными неоднородностями и сорбирующими включениями, актуальной и важной для практики.

**Цель диссертации:** Теоретическое исследование закономерностей переноса примеси в средах, обладающих крупномасштабными неоднородностями, и в присутствии сильно сорбирующих включений.

**Основными задачами диссертации являются:**

1. Построение асимптотической теории переноса примеси, обусловленного классической диффузией, в неоднородных изотропных и анизотропных средах.
2. Получение асимптотической формулы для концентрации примеси в задаче об адвекции-диффузии в неоднородной среде.
3. Разработка асимптотической теории для модели регулярно неоднородной резко контрастной среды с параметрами, зависящими от координат.
4. Анализ переноса примеси в трещиновато-пористой среде с редкими сильно сорбирующими включениями.

**Научная новизна**

Автором впервые:

1. Построена асимптотическая теория переноса примеси, обусловленного классической диффузией, в неоднородных изотропных и анизотропных средах.
2. Получена асимптотическая формула для концентрации примеси в задаче об адвекции-диффузии в неоднородной среде.
3. Исследованы закономерности переноса примеси в модели регулярно неоднородной резко контрастной среды (модели Дыхне) с параметрами, зависящими от координат.
4. Проанализированы закономерности переноса примеси в трещиновато-пористой среде с редкими сильно сорбирующими включениями.

**Практическая ценность**

1. Установленные в работе аналитические результаты являются универсальными и могут быть использованы для решения широкого круга задач о переносе примеси в средах с крупномасштабными неоднородностями.
2. Полученные результаты дают возможность проведения быстрых качественных оценок для характеристик переноса радионуклидов и других загрязнений в геологических средах.
3. Полученные результаты могут быть применены как для усовершенствования существующих, так и для создания новых численных

кодов, предназначенных для моделирования процессов переноса примеси в геологических средах.

**Личный вклад автора состоит в следующем:**

1. Построена асимптотическая теория переноса примеси при классической диффузии в неоднородной изотропной среде.
2. Разработана асимптотическая теория анизотропной классической диффузии в среде с крупномасштабными неоднородностями.
3. Решена задача о переносе примеси в регулярно неоднородной резко-контрастной среде с параметрами, зависящими от координат.
4. Исследовано влияние редких сильно сорбирующих включений на режимы переноса и получены выражения для концентрации на асимптотически больших расстояниях в трещиновато-пористой среде.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Концентрация примеси в задаче о классической диффузии в среде с крупномасштабными неоднородностями на асимптотически больших расстояниях сводится к однократным интегралам вдоль характеристической кривой - траектории концентрационного сигнала. Сама траектория определяется из обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
2. Решение задачи об адвекции-диффузии в неоднородных средах при определенных ограничительных условиях приводит к классической формуле, в которой элемент, описывающий дисперсию примеси, сводится к линейному интегралу от коэффициента диффузии вдоль адвекционного смещения примеси
3. При анизотропной диффузии, когда источник примеси и точка наблюдения лежат по разные стороны плоской границы между средами с различающимися тензорами диффузии, траектория концентрационного сигнала при пересечении границы терпит излом, но, в отличие от изотропной диффузии, в общем случае не лежит в плоскости, перпендикулярной границе раздела.
4. В асимптотической теории переноса примеси в регулярно неоднородной резко контрастной среде (модели Дыхне) с параметрами, зависящими от координат, траектория концентрационного сигнала на ранних временах является плоской, а на поздних – объемной.
5. В трещиновато-пористых средах с редкими сильно сорбирующими включениями, в случае, когда сорбционная емкость превышает критическую величину, на поздних временах реализуются два дополнительных режима переноса – медленная квазидиффузия и сверхзамедленная адвекция-диффузия.

**Достоверность результатов:**

Достоверность результатов базируется на применении современных методов теоретической и математической физики и согласии с численными расчетами.

**Публикации**

По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ, 5 из них в изданиях из списка, рекомендованного ВАК Минобрнауки России.

**Апробация работы**

Основные результаты работы были представлены на ежегодной конференции молодых ученых ИБРАЭ РАН (Москва, 2019), 61-ой научной конференции МФТИ (Долгопрудный, 2018), 62-ой научной конференции МФТИ (Долгопрудный, 2019), 64-ой научной конференции МФТИ (Долгопрудный, 2021).

### **Структура работы**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, четырех приложений и списка литературы из 91 библиографической ссылки, содержит 9 иллюстраций. Общий объем диссертации составляет 75 страниц.

## **СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

**Во введении** обоснована актуальность и практическая значимость работы, изложены основные цели и задачи исследования. Приведен краткий обзор исследований процессов переноса примеси в различных средах.

**В Главе 1** исследуется классический перенос примеси в изотропной среде с крупномасштабными неоднородностями.

**Во Вступлении** кратко описан асимптотический подход, впервые предложенный в работе [19], который применяется для решения задач первых трех глав диссертации. Этот подход применим на расстояниях до источника примеси, значительно превосходящих размер основной области локализации примеси. На таких расстояниях формирование концентрации обусловлено коротковолновой частью механизма переноса, а зависимость концентрации от расстояния до источника примеси пропорциональна убывающей экспоненте с показателем, значительно больше единицы. Результат для концентрации сведен к однократным интегралам вдоль специальной линии – траектории концентрационного сигнала. Сама траектория определяется из вариационного принципа, приводящего к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для единичного вектора касательной к траектории. Такой подход к теории процессов переноса по форме близок к приближению геометрической оптики в электродинамике [20] и квазиклассическому приближению в квантовой механике [21]. Сведение задачи о переносе примеси к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка существенно упрощает процедуру численных расчетов применительно к средам, обладающим крупномасштабными неоднородностями.

В **Разделе 1.1** сформулирована постановка задачи построения асимптотической теории изотропной классической диффузии в среде с крупномасштабными неоднородностями. Решается уравнение диффузии

$$\frac{\partial c(\vec{r}, t)}{\partial t} = \text{div}(D \nabla c(\vec{r}, t)), \quad (1)$$

с коэффициентом диффузии, зависящим от координат,  $D = D(\vec{r})$ . Считается, что в начальный момент времени вся примесь сосредоточена в одной точке, которая выбрана в качестве начала координат

$$c(\vec{r}, 0) = N \delta(\vec{r}), \quad (2)$$

где  $N$  - полное число частиц примеси. Начальное условие в форме (2) используется во всех четырех главах.

В представлении Лапласа,  $c_p(\vec{r}) = \int_0^{\infty} dt c(\vec{r}, t) e^{-pt}$ , уравнение (1) с учетом (2) принимает вид:

$$pc_p(\vec{r}) - \text{div}\{D(\vec{r})\nabla c_p(\vec{r})\} = N\delta(\vec{r}). \quad (3)$$

Решение уравнения (3) на асимптотически далеких расстояниях от источника примеси, когда  $r \gg R(t)$ , где  $R(t)$  - размер основной области ее локализации в момент времени  $t$ , было представлено в форме:

$$c_p(\vec{r}) = A_p(\vec{r})e^{-\Gamma_p(\vec{r})}, \quad \Gamma_p(\vec{r}) \gg 1. \quad (4)$$

Это представление используется и в последующих двух главах. Учитывая аналогию с геометрической оптикой, фактор  $\Gamma_p(\vec{r})$  назван квазиэйкономом.

Благодаря неравенству  $\Gamma_p(\vec{r}) \gg 1$  возникает малый параметр

$$\xi = \left( |\nabla \Gamma_p| \min(L, |\vec{r}|) \right)^{-1}, \quad \xi \ll 1. \quad (5)$$

где  $L$  - характерный масштаб длины, на котором заметно меняется коэффициент диффузии. Выполнение условия  $\xi \ll 1$  лежит в основе теорий, разрабатываемых в главах 1-3. После подстановки (4) в (3) в нулевом порядке по параметру  $\xi$  получается уравнение в частных производных первого порядка для квазиэйконала

$$\left( \nabla \Gamma_p(\vec{r}) \right)^2 = \frac{p}{D(\vec{r})}, \quad (6)$$

Раздел 1.2 посвящен нахождению выражения для квазиэйконала.

Решение уравнения (6) представлено в виде

$$\Gamma_p(\vec{r}) = \sqrt{\frac{p}{D(0)}} \psi(\vec{r}), \quad \psi(\vec{r}) = \int_0^{\vec{r}} dl n(\vec{r}), \quad n(\vec{r}) = \sqrt{\frac{D(0)}{D(\vec{r})}}. \quad (7)$$

Интегрирование происходит вдоль специальной линии - траектории концентрационного сигнала,  $dl$  - дифференциальный элемент длины траектории. Сама траектория определяется из вариационного принципа, обеспечивающего минимум величины  $\psi(\vec{r})$ :

$$\delta_l \psi(\vec{r}) = 0. \quad (8)$$

Отсюда получено уравнение для единичного вектора касательной  $\vec{v}$  к траектории концентрационного сигнала:

$$\frac{d\vec{v}}{dl} = \frac{1}{n} \left( \nabla n - \vec{v} (\vec{v} \nabla n) \right). \quad (9)$$

Из этого уравнения, в частности, следует, что в однородной среде имеет место  $\vec{v} = const$ , и, следовательно, траектория концентрационного сигнала является отрезком прямой, соединяющим точку наблюдения  $\vec{r}$  с источником примеси -  $\vec{r} = 0$ .

В качестве иллюстрации действия вариационного принципа (7) рассмотрен случай, когда между источником и точкой наблюдения имеется плоская граница раздела между двумя средами с различными коэффициентами диффузии. Тогда траектория концентрационного сигнала в точке пересечения границы терпит излом, который описывается формулой, аналогичной закону Снеллиуса:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sqrt{D_1}} = \frac{\sin \theta_2}{\sqrt{D_2}}. \quad (10)$$

Здесь  $D_1, D_2$  - коэффициенты диффузии по разные стороны от границы раздела,  $\theta_1, \theta_2$  - углы между линией концентрационного сигнала и нормалью к границе по соответствующим ее сторонам. Плоскость, содержащая траекторию, перпендикулярна плоской границе между средами.

В Разделе 1.3 вычислена предэкспонента  $A_p(\vec{r})$  в выражении (4) и найдено асимптотическое выражение для концентрации. Уравнение для  $A_p(\vec{r})$  получается в первом порядке по малому параметру  $\xi$  после подстановки выражения (4) в уравнение (3):

$$2 \frac{d \ln(A_p(\vec{r}))}{d\psi} + \text{div} \frac{\vec{v}(\vec{r})}{n(\vec{r})} = 0, \quad (11)$$

Подстановка решения этого уравнения вместе с выражением для квазиэikonала (7) в равенство (4) и последующее сравнение с решением для однородной среды приводит к асимптотическому выражению для концентрации в пространственно-временном представлении в неоднородной среде:

$$c(\vec{r}, t) = \frac{N}{(4\pi D_0 t)^{\frac{\delta}{2}}} \exp\left(-\frac{\psi^2(\vec{r})}{4D_0 t} - H(\vec{r})\right), \quad H(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int_0^{\psi(\vec{r})} d\psi \left( \text{div} \frac{\mathbf{v}(\vec{r})}{n(\vec{r})} - \frac{\delta - 1}{\psi} \right). \quad (12)$$

Здесь  $\delta = 1, 2, 3$  - размерность пространства.

Разделе 1.4 представлена численная реализация асимптотической теории классической диффузии в пространстве размерностью  $\delta = 1, 2$ . Путем сравнения с результатами прямого численного решения уравнения диффузии в неоднородной среде установлена высокая точность асимптотической теории и показано, что, в сравнении с прямыми численными расчетами, вычисления на основе асимптотической теории требуют расчетного времени на два порядка ниже. На Рис. 1 проиллюстрированы результаты расчета концентрации двумя способами.



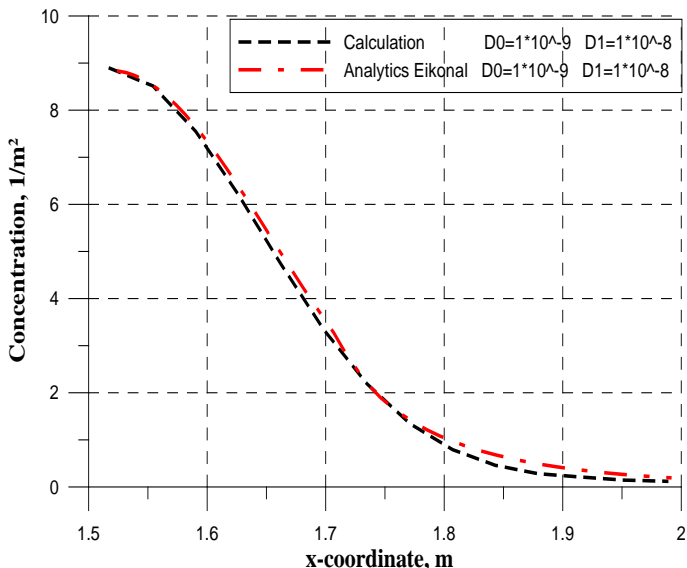


Рис. 1. Результаты, полученные путем прямого численного расчёта и на основе асимптотической теории в двумерном случае. **Calculation** – прямой численный расчет, **Analytics Eikonal** – расчет на основе асимптотической теории.

Раздел 1.5 посвящен задаче о классической адвекции-диффузии в неоднородной среде, отвечающей уравнению:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(\bar{u}c - D\nabla c) = 0, \quad (13)$$

где  $\bar{u}$  и  $D$  - скорость адвекции и коэффициент диффузии, соответственно.

Предполагались выполненными следующие условия

$$ut \ll L_u, \quad |\bar{r} - \bar{u}t| \ll L_D, \quad (14)$$

где  $L_u$  и  $L_D$  - характерные масштабы пространственной зависимости скорости адвекции и коэффициента диффузии, соответственно. После перехода в уравнении (13) в сопутствующую систему координат  $\bar{r} \rightarrow \bar{r}' = \bar{r} - \bar{u}t$  и решения получившегося уравнения найдено следующее выражение для концентрации

$$c(\bar{r}, t) = N (4\pi D_0 \tilde{t})^{-\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{(\bar{r} - \bar{u}t)^2}{4D_0 \tilde{t}(t)} \right], \quad (15)$$

где эффективное время  $\tilde{t} \equiv \tilde{t}(t)$  определено выражением

$$\tilde{t}(t) = \int_0^t dt' \left( \frac{D(\bar{u}t')}{D_0} \right). \quad (16)$$

Эти формулы сохраняют самостоятельный смысл при выполнении неравенства

$$L_D \ll L_u \quad (17)$$

В противном случае, когда  $L_D \sim L_u$ , они сводятся к известному выражению для концентрации при переносе примеси на основе адвекции-диффузии в однородной среде.

В Разделе 1.6 сделаны краткие выводы.

**В Главе 2** исследуется перенос примеси, обусловленный анизотропной диффузией в неоднородной среде. Здесь используется формализм криволинейной геометрии, заимствованный из общей теории относительности.

В Разделе 2.1 сформулирована постановка задачи, базирующейся на уравнении анизотропной диффузии, которое в представлении Лапласа принимает вид

$$p c_p(\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left( D^{jk}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x^k} (c_p(\vec{r})) \right) = N \delta(\vec{r}). \quad (18)$$

Здесь  $D^{jk}(\vec{r})$  - симметричный тензор диффузии,  $x^k$  - компоненты радиус-вектора,  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ , по повторяющимся индексам, как обычно, происходит суммирование.

После подстановки асимптотического выражения для концентрации (4) в уравнение (18) в нулевом порядке по малому параметру  $\xi$  (5) получается уравнение для квазиэйконала:

$$p - D^{jk}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_p(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_p(\vec{r}) = 0. \quad (19)$$

Для описания концентрационного сигнала вводится вектор касательной к траектории

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_p(\vec{r}), \quad (20)$$

где определена эффективная метрика:

$$ds^2 = g_{jk} dx^j dx^k. \quad (21)$$

Метрический тензор  $g_{ij} = p D_{ij}$  и тензор  $g^{ij} = \frac{1}{p} D^{ij}$  определены через тензор диффузии  $D^{ij}$  и обратный ему  $D_{ij}$ .

В результате, выражение для квазиэйконала  $\Gamma_p(\vec{r})$  принимает вид:

$$\Gamma_p(\vec{r}) = \int ds = \int_0^r \sqrt{g_{jk} dx^j dx^k}, \quad (22)$$

где интегрирование происходит вдоль траектории концентрационного сигнала.

В Разделе 2.2 найдено уравнение для вектора  $u^i$ .

Оно выводится по аналогии с уравнением геодезической линии в общей теории относительности, и выглядит следующим образом:

$$\frac{du^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} u^j u^k = 0, \quad (23)$$

где  $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$  - символы Кристоффеля, определяемые выражением

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{kj}). \quad (24)$$

Траектория концентрационного сигнала в однородной анизотропной среде, как и в изотропном случае, является отрезком прямой, соединяющим источник примеси с точкой наблюдения. Если эти две точки лежат по разные стороны плоской границы раздела между двумя однородными средами с различными тензорами диффузии, то в общем случае траектория лежит в плоскости, которая, в отличие от случая изотропных сред, не является перпендикулярной границе раздела (см. Рис.2).

В Разделе 2.3 вычислена предэкспонента  $A_p(\vec{r})$  из (4) и найдено асимптотическое выражение для концентрации.

Уравнение для величины  $A_p(\vec{r})$  получается в первом порядке по малому параметру  $\xi$  после подстановки выражения (4) в уравнение (19):

$$\frac{d \ln A_p(\vec{r})}{ds} + \frac{1}{2} \partial_i u^i = 0. \quad (25)$$

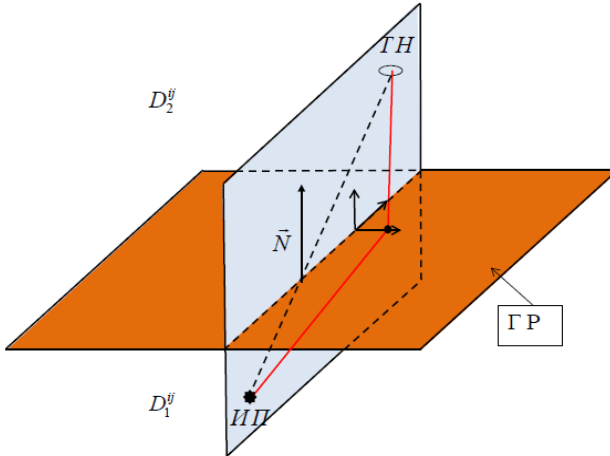


Рис. 2 Преломление концентрационного сигнала на границе двух однородных анизотропных сред с коэффициентами диффузии  $D_1^{ij}$  и  $D_2^{ij}$ . ИП - источник, ТН - точка наблюдения, ΓР - граница раздела между средами, — - траектория концентрационного сигнала.

Подстановка решения этого уравнения вместе с выражением для квазиэйкононала (22) в равенство (4) и последующее сравнение с решением для однородной среды приводит к асимптотическому выражению для концентрации в пространственно-временном представлении в неоднородной среде:

$$c(\vec{r}, t) = \frac{N}{\sqrt{\det[D^{ij}(0)](4\pi t)^3}} \exp \left[ -\frac{1}{4t} \left( \int_0^r \sqrt{D_{jk}} dx^j dx^k \right)^2 - H_a(\vec{r}) \right], \quad (26)$$

$$H_a(\vec{r}) = \int_0^{\vec{r}} ds \left( \frac{1}{2} \partial_i u^i - \frac{1}{s} \right).$$

В Разделе 2.4 кратко подведены итоги главы.

Глава 3 посвящена построению асимптотической теории модели Дыхне с переменными в пространстве коэффициентами изотропной диффузии.

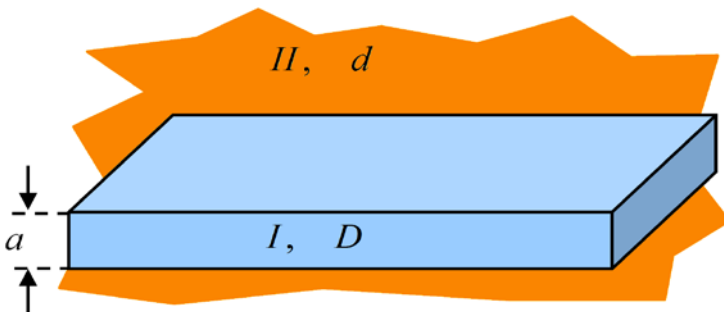


Рис. 3. Геометрия задачи.

Во вступлении описана первоначальная формулировка модели, которая состоит в следующем. Все пространство состоит из двух областей: область **I** – плоскопараллельный слой (условно говоря, трещина), заполненная сильно проницаемой средой с коэффициентом диффузии  $D$  и область **II** – вся оставшаяся часть пространства (матрица), заполненная слабопроницаемой средой с коэффициентом диффузии  $d$ , так что  $D \gg d$  (см. Рис. 3). Модель Дыхне является простейшим примером регулярно неоднородной среды, демонстрирующей проявление неклассического режима переноса – субдиффузии.

В Разделе 3.1 представлены качественные результаты решения исходной модели Дыхне с постоянными коэффициентами диффузии и сформулирована постановка задачи настоящей главы.

В кратком обзоре исходной модели Дыхне отмечено, что имеют место три последовательных интервала времени, в которых реализуются три режима переноса: быстрая классическая диффузия, субдиффузия и медленная классическая диффузия. Смена режимов во времени ведет к многоступенчатой структуре асимптотики концентрации. С возрастанием времени растёт

количество пространственных ступеней асимптотики. Более удаленная ступень определяется более ранним режимом переноса.

В задаче настоящей главы коэффициенты диффузии  $D$  и  $d$  являются функциями координат, удовлетворяющими прежнему условию  $D \gg d$ . Толщина трещины  $a$  считается постоянной. Уравнение переноса имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \text{div}(\mathcal{D} \nabla c), \quad (27)$$

Система координат выбрана так, что  $\vec{r} = \{\bar{\rho}, z\}$  - радиус-вектор, где  $\bar{\rho} = (x, y)$  - двумерная координата вдоль границы плоскопараллельного слоя, а ось  $z$  направлена по нормали к нему. Начало координат выбрано так, что границы между областями **I** и **II** соответствуют равенству  $z = \pm a/2$ . Коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$  в уравнении (27) имеет вид

$$\mathcal{D}(\vec{r}) = D(\vec{r}) \theta\left(\frac{a}{2} - |z|\right) + d(\vec{r}) \theta\left(|z| - \frac{a}{2}\right). \quad (28)$$

Здесь  $\theta(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta > 0, \\ 0, & \eta < 0 \end{cases}$  - функция Хэвисайда. Задача (27) решается с

граничными условиями, которые заключаются в непрерывности концентрации и нормальной компоненты плотности потока примеси на границе между областями.

Считается, что характерный масштаб  $L$  координатной зависимости одинаков для обеих функций  $D(\vec{r})$  и  $d(\vec{r})$  и удовлетворяет условию

$$L > \frac{D}{d} a. \quad (29)$$

Соответственно, пренебрегая зависимостью коэффициента диффузии в трещине от координаты  $z$ , будем обозначать его  $D(\bar{\rho})$ .

При выполнении условия  $|\nabla \Gamma_p| \ll \sqrt{\frac{p}{d}}$ , где  $\Gamma_p$  - квазиэйконал, определению которому дается равенством (4), режимы переноса формируются либо самой трещиной, либо ею совместно с матрицей. В этом случае в представлении Лапласа уравнение для концентрации примеси в трещине имеет вид

$$\left(p + \sqrt{\frac{p}{t_1(\bar{\rho})}}\right) c_p(\bar{\rho}) - \text{div}(D(\bar{\rho}) \nabla c_p(\bar{\rho})) = \frac{N}{a} \delta(\bar{\rho}), \quad (30)$$

где

$$t_1(\bar{\rho}) = \frac{a^2}{4d(\vec{r})\Big|_{z=\frac{a}{2}}}. \quad (31)$$

В противоположном случае, когда  $|\nabla\Gamma_p| \gg \sqrt{\frac{p}{d}}$ , матрица полностью берет на себя формирование режима переноса и тогда уравнение переноса в представлении Лапласа имеет вид:

$$pc_p(\bar{r}) - \text{div}(d(\bar{r})\nabla c_p(\bar{r})) = N\delta(\bar{r}). \quad (32)$$

Раздел 3.2 посвящен нахождению выражения для квазиэikonала.

После подстановки общего выражения для концентрации (4) в уравнения (30) и (32), в нулевом порядке малости по параметру  $\xi$  из (5) получаются уравнения

$$(\nabla\Gamma_{1p}(\bar{\rho}))^2 = \frac{p}{D(\bar{\rho})}, \quad p \gg t_1^{-1}; \quad (33)$$

$$(\nabla\Gamma_{2p}(\bar{\rho}))^2 = \frac{\sqrt{\frac{p}{t_1(\bar{\rho})}}}{D(\bar{\rho})}, \quad t_2^{-1} \ll p \ll t_1^{-1}; \quad (34)$$

$$(\nabla\Gamma_{3p}(\bar{r}))^2 = \frac{p}{d(\bar{r})}, \quad p \ll t_2^{-1}, \quad (35)$$

Время  $t_2$  в (34) и (35) дается выражением

$$t_2(\bar{\rho}) = \left( \frac{D(\bar{\rho})}{d(\bar{r})\Big|_{z=\frac{a}{2}}} \right)^2 t_1(\bar{\rho}) \quad (36)$$

Уравнения (33) – (35) по своей форме совпадают с уравнением для квазиэikonала (6) Главы I.

Далее вводится безразмерный эквивалент квазиэikonала  $\psi_m$ , не зависящий от Лапласовской переменной

$$\Gamma_{mp} = \kappa_m(p)\psi_m, \quad m = 1, 2, 3, \quad (37)$$

где размерные множители  $\kappa_s(p)$  определены равенствами

$$\kappa_1(p) = \sqrt{\frac{p}{D_0}}, \quad \kappa_2(p) = \left[ \frac{p}{D_0^2 t_{10}} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad \kappa_3(p) = \sqrt{\frac{p}{d_0}} \quad (38)$$

Здесь  $t_{10} = t_1(0)$ ,  $d_0 = d(\bar{r})\Big|_{\rho=0, z=\frac{a}{2}}$ .

Из (33) – (35) с учетом (37), (38) приходим к уравнениям для безразмерных функций  $\psi_{sm}$ :

$$(\nabla\psi_m(\bar{\rho}))^2 = n_m^2(\bar{\rho}), \quad m = 1, 2; \quad (\nabla\psi_3(\bar{r}))^2 = n_3^2(\bar{r}), \quad (39)$$

в которых величины  $n_m$  определены равенствами:

$$n_1(\vec{\rho}) = \sqrt{\frac{D_0}{D(\vec{\rho})}}, \quad n_2(\vec{\rho}) = n_1(\vec{\rho}) \left[ \frac{t_{10}}{t_1(\vec{\rho})} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad n_3(\vec{r}) = \sqrt{\frac{d_0}{d(\vec{r})}}. \quad (40)$$

Решения уравнений (39) записываются в форме:

$$\psi_m(\vec{\rho}) = \int_0^{\vec{\rho}} dl_m n_m(\vec{\rho}), \quad m = 1, 2; \quad \psi_3(\vec{r}) = \int_0^{\vec{r}} dl_3 n_3(\vec{r}). \quad (41)$$

где интегрирование происходит вдоль траекторий концентрационных сигналов, определяемых на основе вариационного принципа:

$$\delta \int_0^{\vec{\rho}} dl_m n_m(\vec{\rho}) = 0, \quad m = 1, 2; \quad \delta \int_0^{\vec{r}} dl_3 n_3(\vec{r}) = 0 \quad (42)$$

Отсюда получаются уравнения для единичных векторов касательных к траекториям концентрационного сигнала:

$$\frac{d\vec{v}_m}{dl} = \frac{1}{n_m} \left( \nabla n_m - \vec{v}_m \frac{dn_m}{dl} \right); \quad m = 1, 2, 3. \quad (43)$$

Траектории с  $m = 1, 2$  являются плоскими, а траектория при  $m = 3$  - пространственная.

В Разделе 3.3 получены асимптотические выражения для концентрации в пространственно-временном представлении.

В первом приближении по малому параметру  $\xi$  из уравнений (30) и (32) после подстановки в них выражения (4) получаются уравнения для предэкспонент:

$$\frac{d}{d\psi_m} \left[ \ln \left( A_{mp} \frac{n_s}{n_1} \right) \right] + \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{v}_m}{n_m} \right) = 0, \quad d\psi_m = n_m dl_m; \quad m = 1, 2. \quad (44)$$

$$\frac{d}{d\psi_3} \left[ \ln \left( A_{3p} \right) \right] + \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{v}_3}{n_3} \right) = 0, \quad d\psi_3 = n_3 dl_3. \quad (45)$$

Напомним, что величины, отмеченные значком  $m = 1, 2$ , зависят от двумерной координаты  $\vec{\rho}$ , а со значком 3 - являются функциями трехмерной координаты  $\vec{r}$ .

Путем обратного преобразования Лапласа получены следующие формулы для концентрации в пространственно-временном представлении

$$c(\vec{\rho}, t) \cong \frac{N}{4\pi a D(0)t} \exp \left\{ -\frac{(\psi_1(\vec{\rho}))^2}{4D_0 t} - H_1(\vec{\rho}) \right\}, \quad \frac{(\psi_1(\vec{\rho}))^2}{4D_0 t} \gg \frac{t}{t_1}, 1. \quad (46)$$

$$c(\bar{\rho}, t) \cong \frac{N}{2\pi a D(0) t \sqrt{6}} \exp \left\{ -3 \left( \frac{\psi_2(\bar{\rho})}{4\sqrt{D(0)\sqrt{t_1(0)t}}} \right)^{4/3} - H_2(\bar{\rho}) \right\}, \quad (47)$$

$$\frac{t}{t_2}, 1 \ll \left( \frac{\psi_2(\bar{\rho})}{4\sqrt{D_0\sqrt{t_1(0)t}}} \right)^{4/3} \ll \frac{t}{t_1}.$$

$$c(\bar{r}, t) \cong \frac{N}{(4\pi d_0 t)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\psi_3^2(\bar{r})}{4d_0 t} - H_3(\bar{r}) \right\}, \quad 1 \ll \frac{\psi_3^2(\bar{r})}{4d_0 t} \ll \frac{t}{t_2}. \quad (48)$$

Величины  $H_m(\bar{\rho})$ ,  $H_3(\bar{r})$  в (46) - (48) определены равенствами

$$H_m(\bar{\rho}) = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{\rho}} d\psi_m \left[ \operatorname{div} \left( \frac{\vec{v}_m}{n_m} \right) - \frac{1}{\psi_m} \right], \quad m = 1, 2; \quad (49)$$

$$H_3(\bar{r}) = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{r}} d\psi_3 \left[ \operatorname{div} \left( \frac{\vec{v}_3}{n_3} \right) - \frac{2}{\psi_3} \right].$$

В Разделе 3.4 подведены итоги главы.

В Главе 4 исследован перенос примеси в трещиновато-пористой среде в присутствии редких сильно сорбирующих включений. Проанализированы режимы переноса и установлено асимптотическое поведение концентрации на далеких расстояниях от источника примеси в зависимости от структурных характеристик среды. Примерами сред, содержащих сорбирующие включения, являются геологические породы, содержащие высокую долю глинистых соединений.

В Разделе 4.1 сформулирована постановка задачи и получены основные соотношения.

Трещиновато-пористая среда с редкими адсорбирующими включениями представлена как совокупность трех подсистем (см. Рис. 4): 1) совокупность каналов с высокой проницаемостью, образованных трещинами (или связанными крупными порами), 2) подсистема слабопроницаемых несорбирующих пористых блоков и 3) подсистемы слабопроницаемых пористых блоков, которые могут сильно адсорбировать растворенную в воде смесь.

Основные параметры, характеризующие свойства среды, это  $\Psi_j$  - объемная доля, занимаемая блоками каждого типа ( $j = 1$  обычные блоки,  $j = 2$  - сорбирующие включения), их пористость  $\varphi_j$  и характерный размер  $R_j$ , а также коэффициент задержки  $K$  во включениях.



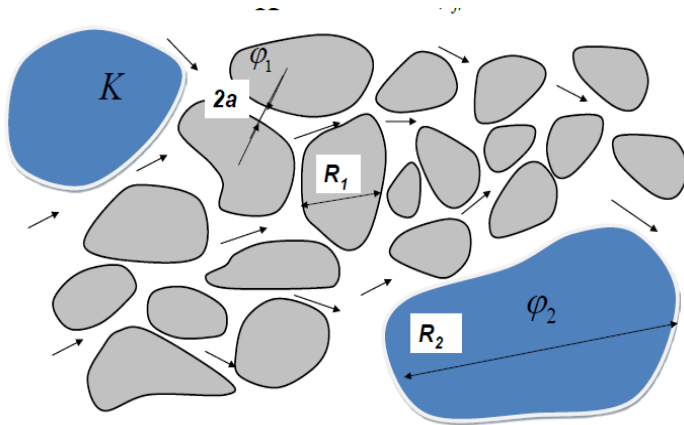


Рис.4. Схематичное изображение статистически-однородной трещиновато-пористой среды с сорбирующими включениями. Светло-серый цвет – обычные пористые блоки, тёмно-серый цвет – сорбирующие включения.

Уравнение для концентрации примеси в трещинах (активной примеси), усредненное на масштабах много больше характерных размеров блоков и расстояний между включениями, имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(\bar{u}c - D\nabla c) = -Q_1 - Q_2, \quad (50)$$

где  $\bar{u}$  - средняя скорость просачивания,  $D$  - коэффициент дисперсии в трещинах, учитывающий как молекулярную диффузию, так и пространственные гидродинамические флуктуации, а  $Q_1$  и  $Q_2$  - плотности стоков в пористую среду и сорбирующие включения, определяемых обменом с блоками. Предполагалось что в начальный момент времени вся примесь расположена в одной точке внутри системы трещин

$$c(\vec{r}, 0) = N_0 \delta(\vec{r}), \quad (51)$$

где  $N_0$  - полное число частиц примеси.

В представлении Фурье-Лапласа уравнение (50) приобретает форму:

$$\left[ p + \Lambda_1(p) + \Lambda_2(p) + i(\bar{u}\vec{k}) + Dk^2 \right] = N_0, \quad (52)$$

Здесь  $\Lambda_j(p)$  - функции памяти, которые с помощью соотношения  $Q_{p,\vec{n},j} = \Lambda_j(p)c_{p,\vec{n}}$  связывают плотности стоков с концентрацией активной примеси. В предельных случаях эти функции имеют вид:

$$\Lambda_j(p) \cong \begin{cases} \sqrt{p/t_{aj}} & \text{при } pt_{bj} \gg 1, \\ p\sqrt{t_{bj}/t_{aj}}, & \text{при } pt_{bj} \ll 1. \end{cases} \quad (53)$$

Входящие сюда характерные времена определены как:

$$t_{a1} = \frac{R_1^2}{\Psi_1^2 (\varphi_1 / \varphi_{fr})^2 d}, \quad t_{b1} = \frac{R_1^2}{d}, \quad t_{a2} = \frac{R_2^2}{\Psi_2^2 (\varphi_2 / \varphi_{fr})^2 dK}, \quad t_{b2} = \frac{R_2^2}{d} K. \quad (54)$$

Физический смысл времени  $t_{aj}$  состоит в том, что на временах порядка  $t_{aj}$  количество примеси в блоках сорта  $j$  и в трещинах сравнимо по порядку величины. Физический смысл времени  $t_{bj}$  - в том, что на временах больше  $t_{bj}$  концентрация примеси внутри блока сорта  $j$  становится практически однородной.

В Разделе 4.2 проанализированы режимы переноса.

Для описания режимов использовались следующие зависящие от времени характеристики: число активных частиц -  $N(t)$ , среднее смещение -  $X(t)$  и дисперсия -  $\sigma_\alpha(t)$ :

$$\begin{aligned} N(t) &= \int d^3 r c(\vec{r}, t), \quad X(t) = N^{-1}(t) \int d^3 r r_{\parallel} c(\vec{r}, t), \\ \sigma_\alpha^2(t) &= N^{-1}(t) \int d^3 r r_\alpha^2 c(\vec{r}, t) - X^2(t) \delta_{\alpha\parallel}. \end{aligned} \quad (55)$$

где знаки  $\alpha = \parallel$  и  $\perp$  - обозначают компоненты вдоль и поперёк скорости адвекции  $\vec{u}$ , соответственно.

В зависимости от соотношения между характерными временами (54) возникает последовательность интервалов текущего времени со свойственными каждому из них режимами переноса. Во всех случаях предполагаем выполненным условие

$$t_u \lesssim \min(t_{1a}, t_{2a}), \quad t_u = \frac{4D}{u^2} \quad (56)$$

Перечислим режимы переноса, которые реализуются при следующем соотношении между характерными временами

$$t_{a1} \ll t_{a2}, \quad \frac{t_{b2}}{t_{a2}} \gg \frac{t_{b1}}{t_{a1}}.$$

1.  $t \ll t_{a1}$ .

$$\begin{aligned} N(t) &\cong N_0, \quad X(t) \cong ut, \quad \sigma_{\parallel}(t) \cong \sqrt{2Dt}; \\ \sigma_{\perp}(t) &\cong \begin{cases} 2\sqrt{Dt} \text{ } npu \text{ } t \ll (t_{a1} t_u^2)^{\frac{1}{3}}, \\ \sigma_{\parallel}(t) \cong \frac{4}{\sqrt{5}} ut \left( \frac{t}{\pi t_{a1}} \right)^{\frac{1}{4}} \text{ } npu \text{ } (t_{a1} t_u^2)^{\frac{1}{3}} \ll t \ll t_{a1} \end{cases} \end{aligned} \quad (57)$$

Перенос примеси здесь соответствует режиму, близкому к быстрой адвекции-диффузии.

2.  $t_{a1} \ll t \ll t_{b1}$ .

$$N(t) \cong N_0 \sqrt{\frac{t_{a1}}{\pi t}}, \quad X(t) \cong \sqrt{\pi D_{u1} t}, \quad \sigma_{\parallel}(t) \cong \sqrt{(4-\pi) D_{u1} t}, \quad \sigma_{\perp}(t) \cong 2\sqrt{D \sqrt{\pi t_{a1} t}}. \quad (58)$$

Здесь

$$D_{u1} = u^2 t_{a1} \quad (59)$$

В продольном направлении реализуется режим квазидиффузии, впервые установленный в работе [22], а в поперечном - субдиффузия.

$$3. \quad t_{b1} \ll t \ll t_*, \quad t_* = t_{b1} \frac{t_{a2}}{t_{a1}}.$$

$$N(t) \cong N_1, \quad X(t) \cong u_1 t, \quad \sigma_{\parallel}(t) \cong \sqrt{2 D_1 t}, \quad \sigma_{\perp}(t) \cong 2\sqrt{D_1 t}. \quad (60)$$

Здесь

$$N_1 = N \sqrt{\frac{t_{a1}}{t_{b1}}}, \quad \bar{u}_1 = \bar{u} \sqrt{\frac{t_{a1}}{t_{b1}}}, \quad D_1 = D \sqrt{\frac{t_{a1}}{t_{b1}}}. \quad (61)$$

Реализуется медленная адвекция-диффузия.

$$4. \quad t_* \ll t \ll t_{b2}.$$

$$N(t) \cong N_0 \sqrt{\frac{t_{a2}}{\pi t}}, \quad X(t) \cong \sqrt{\pi D_{u2} t}, \quad \sigma_{\parallel}(t) \cong \sqrt{(4-\pi) D_{u2} t}, \quad \sigma_{\perp}(t) \cong 2\sqrt{D \sqrt{\pi t_{a2} t}}. \quad (62)$$

Здесь  $D_{u2} = u^2 t_{a2}$ .

В продольном направлении реализуется медленная квазидиффузия, а в поперечном - субдиффузия.

$$5. \quad t \gg t_{b2}$$

$$N(t) \cong N_2, \quad X(t) \cong u_2 t, \quad \sigma_{\parallel}(t) \cong \sqrt{2 D_2 t}, \quad \sigma_{\perp}(t) \cong 2\sqrt{D_2 t}. \quad (63)$$

Здесь

$$N_2 = N_0 \sqrt{\frac{t_{b2}}{t_{a2}}}, \quad \bar{u}_2 = \bar{u} \sqrt{\frac{t_{b2}}{t_{a2}}}, \quad D_2 = D \sqrt{\frac{t_{b2}}{t_{a2}}} \quad (64)$$

Реализуется сверхзамедленная адвекция-диффузия.

На Рис. 5 схематически показана зависимость числа частиц активной примеси от времени.

В случае, если  $t_{a2} \ll t_{a1}$ , влияние сорбирующих включений на режимы переноса оказывается доминирующим. В этом случае выделить режимы переноса, обусловленные простыми пористыми блоками невозможно. В итоге реализуется следующая последовательность режимов: быстрая адвекция-диффузия, медленная квазидиффузия в продольном направлении (субдиффузия в поперечном направлении), сверхзамедленная адвекция-диффузия.

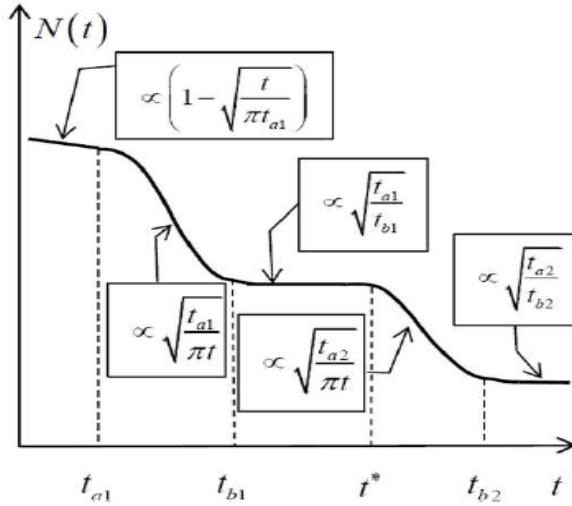


Рис.5. Схематическое изображение зависимости числа активных частиц примеси  $N(t)$  от времени.

Раздел 4.3 посвящен вычислению асимптотических выражений для концентрации активной примеси на далёких расстояниях от источника примеси. Приведем здесь выражения для ближних ступеней асимптотик, отвечающих временным интервалам, рассмотренных в предыдущем разделе.

1.  $t \ll t_{a1}$ .

$$c(\bar{r}, t) \cong \frac{N_0}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\bar{r} - \bar{u}t)^2}{4Dt}\right], \quad \frac{(\bar{r} - \bar{u}t)^2}{4Dt} \gg \frac{t}{t_{a1}}. \quad (65)$$

2.  $t_{a1} \ll t \ll t_{b1}$ .

$$c(\bar{r}, t) \cong \frac{N_0 \frac{D_{u1}}{D}}{(4\pi D_{u1}t)^{3/2}} \exp\left[-\frac{r^2}{4D_{u1}t} - \frac{ur - \bar{u}\bar{r}}{2D}\right], \quad \frac{t}{t_{b1}} \ll \frac{r^2}{4D_{u1}t^2} \ll \frac{t}{t_{a1}}. \quad (66)$$

3.  $t_{b1} \ll t \ll t_*$ ,  $t_* = t_{b1} \frac{t_{a2}}{t_{a1}}$ .

$$c(\bar{r}, t) \cong \frac{N_1}{(4\pi D_1t)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\bar{r} - \bar{u}_1t)^2}{4D_1t}\right], \quad \frac{t}{t_*} \ll \frac{(\bar{r} - \bar{u}_1t)^2}{4D_1t} \ll \frac{t}{t_*}. \quad (67)$$

4.  $t_* \ll t \ll t_{b2}$

$$c(\vec{r}, t) \cong \frac{N_0 \frac{D_{u2}}{D}}{(4\pi D_{u2} t)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[ -\frac{r^2}{4D_{u2} t} - \frac{ur - \vec{u}\vec{r}}{2D} \right], \quad \frac{t}{t_{b2}} \ll \frac{r^2}{4D_{u2} t} \ll \frac{t}{t_*}. \quad (68)$$

5.  $t \gg t_{b2}$

$$c(\vec{r}, t) \cong \frac{N_2}{(4\pi D_2 t)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[ -\frac{(\vec{r} - \vec{u}_2 t)^2}{4D_2 t} \right], \quad \frac{(\vec{r} - \vec{u}_2 t)^2}{4D_2 t} \ll \frac{t}{t_{b2}}. \quad (69)$$

В разделе 4.4 подведены итоги главы.

В Приложении 1 получены формулы для концентрации при изотропной диффузии в однородной среде в пространстве размерностью  $\delta = 1, 2, 3$ .

В Приложении 2 получена формула для концентрации при анизотропной диффузии в однородной среде.

В Приложении 3 показано, что, если тензор диффузии пропорционален единичному тензору, то уравнение для траектории концентрационного сигнала при анизотропной диффузии сводится к соответствующему уравнению для изотропной среды.

В Приложении 4 получены и проанализированы уравнения для концентрационного сигнала в условиях, когда источник примеси и точка наблюдения находятся по разные стороны плоской границы между двумя однородными анизотропными средами.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Концентрация примеси при классической диффузии в неоднородной среде на расстояниях, значительно превосходящих размер основной области локализации примеси, сведено к интегралам вдоль линии, условно названной траекторией концентрационного сигнала. Сама траектория определяется из обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, вытекающего из вариационного принципа (аналога принципа Ферма).

2. Решение задачи об адвекции-диффузии в неоднородных средах при определенных ограничительных условиях сведено к классической формуле, в которой элемент, описывающий дисперсию примеси, сведен к линейному интегралу от коэффициента диффузии вдоль адвекционного смещения примеси.

3. Путем применения формализма криволинейной геометрии, заимствованного из общей теории относительности, построена асимптотическая теория классической анизотропной диффузии в среде с крупномасштабными неоднородностями.

4. В асимптотической теории переноса примеси в регулярно неоднородной резко контрастной среде (модели Дыхне) с параметрами, зависящими от координат, траектория концентрационного сигнала на ранних временах является плоской, а на поздних – объемной.

5. Разработана модель переноса примеси в насыщенной статистически однородной трещиновато-пористой среде, содержащей редкие сорбирующие

включения. Установлены режимы переноса и вычислены асимптотики концентрации на далеких расстояниях от источника примеси. В том случае, когда сорбционная емкость включений превышает критическую величину, на поздних временах реализуются два дополнительных режима переноса – медленная квазидиффузия и сверхзамедленная адвекция-диффузия.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fick A.* On liquid Diffusion // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science — 1855. — Vol. 10:63. — pp. 30-39.
2. *Scher H., Lax M.* Continuous time random walk model of hopping transport: application to impurity conduction // J. Non-Crystalline Solids. — 1972. — Vol. 8 — pp. 497.
3. *Scher H., Lax M.* Stochastic Transport in a Disordered Solid. I. Theory // Phys. Rev. B. — 1973. — Vol. 7. — pp. 4491.
4. *Qing Gu et al.* Non-Gaussian Transport Measurements and the Einstein Relation in Amorphous Silicon // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 76. — pp. 3196–3199.
5. *Bernasconi J., Beyeler H. U., Strässler S., and Alexander S.* // Phys. Rev. Lett. — 1979.— Vol. 42. — pp. 819–822.
6. *Blom P. W. M., M. Vissenberg M. C. J.* Dispersive hole transport in poly (22immer nevinylene) // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 80. — pp. 3819-3822.
7. *Amblard F., Maggs A. C., Yurke B.* Subdiffusion and anomalous local visco elasticity in actin networks // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77. — pp. 4470-4473.
8. *Douglas S. Martin, Martin B. Forstner, Josef A. Kas.* Apparent Subdiffusion Inherent to Single Particle Tracking // Biophys. J. — 2002. — Vol. 83(4) . — pp. 2109-2117.
9. *Schuitz G. J., Schindler H., Schmidt Th.* Single-Molecule Microscopy on Model Mem- branes Reveals Anomalous Diffusion // Biophys. J. — 1997. — Vol. 73. — pp. 1073-1080.
10. *Weiss M. et al.* Anomalous Protein Diffusion in Living Cells as Seen by Fluorescence Correlation Spectroscopy // Biophys J. — 2003. — Vol. 84(6) . — pp. 4043.
11. *Banks D. S., Fradin C.* Anomalous Diffusion of Proteins Due to Molecular Crowding // Biophys. J. — 2005. — Vol. 89. — pp. 2960.
12. *Klemm A., Mueller H.-P., Kimmich R.* Nmr microscopy of pore-space backbones in rock, sponge, and sand in comparison with random percolation model objects // Phys.Rev. E.— 1997. — Vol. 55.— pp. 4413-4423.
13. *Drazer G., Zanette D.* Experimental evidence of power-law trapping-time distributions in porous media// Phys. Rev. E. — 1999. — Vol. 60(5) . — pp. 5858
14. *Gregoire G., Chate H., Tu Y.* Active and passive particles: Modeling beads in a bacterial bath // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 64. — pp. 011902.
15. *Klafter J., White B.S., Levandowsky M.* in: W. Alt, J. Hoffmann (Eds.) // Biological Motion, Lecture Notes in Biomathematics — 1990 — Vol. 89, Springer, Berlin.
16. *Stolt K., Graham W. R., Ehrlich G.* Surface diffusion of individual atoms and 22immers: Re on W(211) // J. Chem. Phys. — 1976. — Vol. 65. — pp. 3206.

17. *Luedtke W. D., Landman U.* Slip Diffusion and Lévy Flights of an Adsorbed Gold Nanocluster // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 82. — pp. 3835.
18. *Leonid Bolshov, Peter Kondratenko, Karsten Pruess and Vladimir Semenov* Nonclassical Transport Processes in Geologic Media: Review of Field and Laboratory Observations and Basic Physical Concepts // *Vadose Zone Journal* — 2008. — Vol. 7. — No. 4. — pp. 1181-1190.
19. *Кондратенко П. С.* Асимптотический подход к описанию неклассических процессов переноса. Принцип Ферма // *Письма в ЖЭТФ* — 2017. — т. 106. — вып. 9 — стр. 581-584.
20. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред // Москва, Физматлит (2005).
21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика: нерелятивистская теория // Москва, Физматлит (2004).
22. *Чукбар К.В.*, Квазидиффузия пассивного скаляра // *ЖЭТФ* — 1996. — т. 109 — No. 4. — стр. 1335-1348.

### ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Кондратенко П.С., Матвеев А.Л.* Классическая адвекция-диффузия в неоднородных средах // *ЖЭТФ* — 2020. — т. 157. — вып. 4. — стр. 703–706.
2. *Kondratenko, P.S., Matveev, A.L., Vasiliev, A.D.* Numerical implementation of the asymptotic theory for classical diffusion in heterogeneous media // *Eur. Phys. J. B* — 2021. — Vol. 94, —50.
3. *Кондратенко П.С., Матвеев А.Л., Обухов Ю.Н.*, Асимптотическая теория анизотропной классической диффузии в неоднородных средах // *ЖЭТФ*. — 2021. — том 159. — вып. 7. — стр. 719-723.
4. *Кондратенко П.С., Матвеев А.Л.* Неклассический перенос примеси в модели Дыхне с параметрами, зависящими от координат. Принцип Ферма // *ЖЭТФ*. — 2021. — том 159. — вып. 7. — стр. 724-729.
5. *Matveev, A.L., Matveev, L.V.* Impurity transport regimes in fractured-porous medium with widely-spaced adsorbing inclusions // *Special Topics & Reviews in Porous Media: An International Journal*. — 2019. — Vol. 10(6). — p. 555–567.
6. *Матвеев А.Л.* Перенос примеси в трещиновато-пористой среде, содержащей редкие случайные включения, сорбирующие примесь // *Труды 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 19-25 ноября 2018 года. Фундаментальная и прикладная физика.* — М.: МФТИ, 2018.— стр. 279.
7. *Кондратенко П.С., Матвеев А.Л.* Аналитические результаты для классической адвекции-диффузии в неоднородных средах // *Труды 62-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 18-24 ноября 2019 года. Фундаментальная и прикладная физика.* — М.: МФТИ, 2019. — стр. 319.
8. *Кондратенко П.С., Матвеев А.Л., Обухов Ю.Н.* Классическая диффузия в анизотропной среде с крупномасштабными неоднородностями // *Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 29 ноября – 03 декабря 2021. Фундаментальная и прикладная физика.* — 2021. — стр. 253.

Матвеев Александр Леонидович

Перенос примеси в средах с крупномасштабными неоднородностями и сорбирующими включениями

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 01.07.2022 г.  
Формат 60 × 84 1/16. Усл. Печ. Л. 1,25. Уч.-изд. Л. 1,05.

Тираж 100 экз.  
Печать на аппарате Rex-Rotary.  
ИБРАЭ РАН. 115191, Москва, ул. Б. Тульская, 52  
Телефон: 8-495-955-22-66