

На правах рукописи

Лёзина Наталья Романовна

**Методы разделения области для задач
геофизической гидротермодинамики в
морях и океанах**

1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук.

Научный **Агошков Валерий Иванович**

руководитель: д. ф.-м. н., профессор

Официальные **Ильин Валерий Павлович**

оппоненты: д. ф.-м. н., Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник

Реснянский Юрий Дмитриевич

д. ф.-м. н., Гидрометеорологический научно-исследовательский центр Российской Федерации, главный научный сотрудник

Ведущая **Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук»**
организация:

Защита состоится «20» июня 2022 года в 16:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.455.01 при федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики имени Г. И. Марчука Российской академии наук по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИВМ РАН и на сайте <https://www.inm.ras.ru>.

Автореферат разослан «_____» _____ 2022 г.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба высылать ученому секретарю диссертационного совета по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, 8.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.455.01,
д. ф.-м. н.

Бочаров Г. А.

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена разработке и применению итерационных алгоритмов разделения (декомпозиции) области в задачах геофизической гидротермодинамики океанов и морей. В значительной части работ, посвященных методам разделения области, основная идея заключается в том, что решение исходной задачи заменяется решением задач в подобластях, а также решением вспомогательных подзадач на части пересечения подобластей. Применение методов декомпозиции области к модельным задачам, таким как задача конвекции–диффузии и задача, соответствующая системе уравнений мелкой воды, является актуальной задачей. Одной из областей математической физики, в которой используются такие задачи, является гидротермодинамика, в частности, океанология.

Применение методов разделения области может оказаться перспективным направлением для задач геофизической гидротермодинамики, в том числе для процедур ассимиляции данных наблюдений. В работе рассматривается подход, который основывается на теории оптимального управления, результатах теории обратных и некорректно поставленных задач, применении сопряженных уравнений и итерационных процессов. Данный подход применяется к задачам конвекции–диффузии и задаче, соответствующей линеаризованной системе уравнений мелкой воды. Также рассматривается совместное применение методов разделения области и вариационной ассимиляции данных в модельных задачах.

Актуальность темы исследования. Для сложных задач математического моделирования, таких как задачи гидротермодинамики океанов и морей, часто применяются методы, позволяющие упростить решение системы уравнений. При использовании метода расщепления решение общей системы уравнений сводится к решению известных задач: конвекции–диффузии, линеаризованной системы уравнений мелкой воды и эллиптических задач. В настоящей работе проводится исследование подхода к формулировке методов разделения области, предложенного В.И. Агошковым, для подзадач, к которым может быть сведена система уравнений

гидротермодинамики, а также применение методов разделения области в процедурах вариационной ассимиляции данных.

Основной целью работы является исследование итерационных алгоритмов разделения области, основанных на теории обратных задач и сопряженных уравнений, их применение к задачам вариационной ассимиляции данных, а также создание комплекса программ для применения метода разделения области к модели реальной акватории.

Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи**:

- 1) провести численное исследование алгоритмов разделения области, основанных на теории обратных задач и сопряженных уравнений, для задачи конвекции–диффузии и линеаризованной системы уравнений мелкой воды;
- 2) исследовать и провести сравнение подхода, основанного на теории обратных задач и сопряженных уравнений, с другими подходами для построения алгоритмов разделения области;
- 3) исследовать совместное применение алгоритмов вариационной ассимиляции данных и разделения области для задач гидротермодинамики моря;
- 4) разработать комплекс программ для использования метода разделения области в модели гидротермодинамики реальной акватории.

Научная новизна работы заключается в применении подхода к построению алгоритмов разделения области, основанных на теории обратных задач и сопряженных уравнений, в задачах гидротермодинамики моря отдельно и совместно с процедурами вариационной ассимиляции данных наблюдений за геофизическими параметрами.

Теоретическая ценность работы состоит в исследовании и теоретическом обосновании применения методов разделения области в задачах гидротермодинамики моря на примере «основных подзадач» (конвекции-диффузии и линеаризованной систе-

мы уравнений мелкой воды), а также в разработке соответствующих алгоритмов для представленных методов разделения области.

Практическая ценность работы заключается в применении и исследовании предложенных алгоритмов разделения области к модели реальной акватории моря.

В работе были использованы следующие методы и подходы: методы разделения области; теория оптимального управления; теория обратных и некорректно поставленных задач; методы теории сопряженных уравнений; итерационные методы решения задач; методы вариационной ассимиляции данных наблюдений; методы вычислительной математики для численного решения задач.

Положения, выносимые на защиту.

- 1) исследование методов разделения области для «основных подзадач» модели гидротермодинамики моря;
- 2) сравнение предложенных методов разделения области с другими подходами к построению алгоритмов разделения области;
- 3) исследование совместного применения методов разделения области и вариационной ассимиляции данных в задачах гидродинамики открытой акватории;
- 4) программная реализация метода разделения области, основанного на теории обратных задач и сопряженных уравнений, для реальной акватории моря.

Степень достоверности и апробация результатов.

Основные результаты докладывались на семинаре «Вычислительная математика и приложения» в Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН и следующих конференциях: 25th International Domain Decomposition Conference DDXV; Numerical Analysis and Scientific Computation with Applications NASCA 2018; The 5th ECCOMAS Young Investigators Conference; Международная конференция «Марчуковские научные чтения

2021»; IMA Conference on Inverse Problems from Theory to Application; EGU General Assembly 2017; Международная научная конференция «Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений 2017»; 60-я научная конференция МФТИ.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 6 работ, в том числе 4 статьи [1–4] в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих требованиям ВАК, а также индексирующихся в Web of Science или Scopus, и 2 печатные работы [5, 6] в прочих изданиях.

Личный вклад автора. Автором реализован подход в виде алгоритмов и их программной реализации для метода разделения области для реальной акватории, а также проведены исследования других подходов к методу разделения области и их сравнение. Кроме того, автором совместно с Шелопут Т. О. проведено исследование применения метода разделения области для задач вариационной ассимиляции данных.

В работе [1] автором предложена модификация алгоритма разделения области, относящаяся к изменению вида условий шивки. В работах [2, 3] автором совместно с Шелопут Т. О. предложен алгоритм совместного применения методов разделения области и вариационной ассимиляции данных. Численные эксперименты для совместного применения методов разделения области и вариационной ассимиляции данных проведены автором лично. В работе [4] вклад автора относится к применению метода разделения области. В совместной с Шелопут Т. О. работе [5] вклад автора относится к части, соответствующей применению метода разделения области. В работе [6] исследование проведено совместно с Агошковым В. И., автором проведены численные эксперименты для модели гидротермодинамики Балтийского моря.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем работы составляет 93 страницы, включая 32 рисунка и 3 таблицы. Список литературы содержит 118 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе представлена система уравнений для задачи гидротермодинамики моря в приближениях гидростатики и Буссинеска, введены используемые обозначения. Основной особенностью рассматриваемой модели циркуляции океана, разработанной в ИВМ РАН, является использование метода расщепления по физическим процессам при ее численной реализации, что отличает ее от других известных моделей океана.

В исходной области моделирования записывается система уравнений гидротермодинамики в приближении Буссинеска и гидростатики для функций компонент скоростей u_1 , u_2 , уровня ξ , температуры T , солёности S :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{u}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix} \vec{u} - g \mathbf{grad}\xi + A_u \vec{u} + (A_k)^2 \vec{u} = \vec{f} - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad}P_a - \\ - \frac{g}{\rho_0} \mathbf{grad} \int_0^z \rho_1(T, S) dz', \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - m \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^H \Theta(z) u_1 dz \right) - m \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^H \Theta(z) \frac{n}{m} u_2 dz \right) = f_3, \\ \frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \end{array} \right.$$

где $\vec{f} = (f_1, f_2)$, f_3 , f_T , f_S – заданные функции, $g = \text{const} > 0$ – ускорение свободного падения. Система уравнений дополняется соответствующими граничными и начальными условиями.

При рассмотрении последовательно уравнений из системы гидротермодинамики в классической постановке, считая все компоненты решений обладающими необходимой гладкостью по всем независимым переменным, на соответствующих шагах метода рас-

щепления можно получить «основные» подзадачи. Таким образом, при реализации шагов метода расщепления, после каждого шага получается приближение для соответствующей задачи. После формулировки схемы расщепления и перехода к полудискретной математической модели исходной задачи, реализация алгоритма решения исходной задачи сводится к численному решению основных типов подзадач таких как, например, задача конвекции–диффузии и задача, соответствующая линеаризованной системе уравнений мелкой воды.

Во второй главе рассмотрены методы разделения области в задачах геофизической гидротермодинамики. В главе описана основная идея подхода к построению алгоритмов разделения области, а также рассмотрены подробнее некоторые подходы к их построению для задач конвекции–диффузии и линеаризованной системы уравнений мелкой воды. Идея методологии, предложенной В.И. Агошковым, состоит в следующем. При разделении исходной области на подобласти на внутренней границе записываются условия сшивки. Некоторые из условий сшивки записываются через «граничные функции», которые объявляются «управлениями» и подлежат отысканию вместе с решением в подобластях. В качестве «уравнения замыкания» принимается вторая часть условий сшивки, которые записываются на внутренней границе «в смысле наименьших квадратов». Таким образом, формулируется задача оптимального управления, которая решается уже известными методами. В диссертационной работе данная методология применяется к решению сформулированных в главе 1 «основных подзадач», к которым методом расщепления приближенно сводится исходная нестационарная задача гидротермодинамики океанов и морей. В главе представлен обзор известных методов разделения области, а также приведены подходы к построению методов разделения области, основанных на теории обратных задач и сопряженных уравнений, для задачи конвекции–диффузии (задачи о распространении тепла), описана постановка задачи, представлены вариационные уравнения и приведен итерационный алгоритм метода разделения области.

Для задачи о распространении тепла

$$\left\{ \begin{array}{l} T_t + (\vec{U} \cdot \mathbf{Grad}) T - \mathbf{Div}(\hat{a}_T \mathbf{Grad} T) = f_T \text{ в } D \times (t_0, t_1), \\ T = T(0) \text{ при } t = t_0 \text{ в } D, \\ U_n^{(-)} T - \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T (T - T_a) = Q_T + U_n^{(-)} d_T \text{ на } \Gamma_s \times (t_0, t_1), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_0, t_1), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_H \times (t_0, t_1) \end{array} \right. \quad (1)$$

с заданными \vec{U} , μ_T , ν_T , f_T , γ_T , T_a , Q_T , d_T , рассмотрены следующие условия сшивки на введенной внутренней границе $\Gamma_{in} \times (t_0, t_1)$:

$$T_1 = T_2, \\ \frac{p - \vec{U} \cdot \vec{N}_1}{2} T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial N_{T,1}} = - \left(\frac{p - \vec{U} \cdot \vec{N}_2}{2} T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial N_{T,2}} \right),$$

где \vec{N}_i – вектор внешней нормали к ∂D_i , $i = 1, 2$, $p(x, y, z, t)$ – заданный параметр. В качестве дополнительной неизвестной, которая объявляется «управлением», выбирается вторая часть этих условий, а в качестве «уравнения замыкания», которое рассматривается «в смысле наименьших квадратов», принимается первая часть этих условий, соответствующая равенству температур на внутренней границе. Также в главе приведены некоторые результаты сравнения метода разделения области, основанного на теории обратных задач и сопряженных уравнений, для задачи конвекции–диффузии с другим известным подходом к построению алгоритма разделения области, представлено описание оптимизированного метода Шварца¹ и приведены результаты численных экспериментов. Результаты сравнения метода, основанного на теории обратных задач и сопряженных уравнений, и оптими-

¹ Martin V. An optimized Schwarz waveform relaxation method for the unsteady convection diffusion equation in two dimensions // Applied Numerical Mathematics. – 2005. – Vol. 52, no. 4. – P. 401–428.

зированной метода Шварца представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Сравнение максимального значения модуля разности решения исходной задачи и задач с применением метода разделения области, основанного на теории обратных задач и сопряженных уравнений, (метод 1) и оптимизированного метода Шварца (метод 2) в уравнении конвекции–диффузии

	метод 1	метод 2
количество итераций	6	5
$\max T - T_\alpha $	0.002741	0.000270

Далее в главе рассматривается линеаризованная система уравнений мелкой воды, приведена постановка задачи, а также предложен итерационный алгоритм для метода разделения области для стационарной задачи. Для данной постановки автором предложен другой вариант метода разделения области, построен соответствующий данному методу итерационный алгоритм, а также проведено исследование о разрешимости задачи и представлены результаты численного сравнения методов разделения области для линеаризованной системы уравнений мелкой воды.

Линеаризованная система уравнений мелкой воды с введенной аппроксимацией по времени имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\bar{v}^j}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \bar{v}^j + r\bar{v}^j - g \mathbf{grad} \xi^j = \bar{f}^j + \frac{\bar{v}^{j-1}}{\Delta t} \text{ в } \Omega, \\ \frac{\xi^j}{\Delta t} - \mathbf{div} (H\bar{v}^j) = \frac{\xi^{j-1}}{\Delta t} \text{ в } \Omega, \\ H\bar{v}^j \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

В дальнейшем задача (2) рассматривается на интервале времени (t_{j-1}, t_j) в полудискретном виде, поэтому для удобства индексы j не указываются, т.е.: $\bar{v} \equiv \bar{v}^j$, $\xi \equiv \xi^j$ и т.д. Также вводятся обозначения $\vec{F} = \left(f_1^j + u^{j-1}/\Delta t, f_2^j + v^{j-1}/\Delta t, \xi^j/\Delta t \right)^T = \left(\tilde{f}, (\vec{F})_3 \right)^T$, $\tilde{f} \equiv (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$. Тогда задача (2) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\vec{v}}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v} + r\vec{v} - g \mathbf{grad} \xi = \tilde{f} \text{ в } \Omega, \\ \frac{\xi}{\Delta t} - \mathbf{div}(H\vec{v}) = (\vec{F})_3 \text{ в } \Omega, \\ H\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть граница Γ_{in} делит область Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2 . Индексом $i = 1, 2$ помечаются функции, относящиеся к каждой из подобластей. Задача (3) может быть записана для функций \vec{v}_1, ξ_1 в подобласти Ω_1 , и для \vec{v}_2, ξ_2 в подобласти Ω_2 . Пусть $\Gamma_i = \partial\Omega_i, \vec{n}_i$ – внешняя нормаль к границе Γ_i области $\Omega_i, i = 1, 2$. Также ставится требование выполнения условий сшивки на внутренней жидкой границе Γ_{in} :

$$\xi_1 = \xi_2 \text{ на } \Gamma_{in}, \quad (4)$$

$$H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = -H\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 \text{ на } \Gamma_{in}. \quad (5)$$

Таким образом, можно рассмотреть два варианта метода разделения области: первый вариант заключается в выборе дополнительной неизвестной как $\vartheta_{sw} \equiv \xi_i$, а в качестве «уравнения замыкания» рассматривается уравнение (5). Для второго варианта метода разделения области дополнительная неизвестная выбирается $\sqrt{gH} \vartheta_{sw} \equiv H\vec{v}_i$, а в качестве «уравнения замыкания» рассматривается уравнение (4). Результаты сравнений данных вариантов алгоритма разделения области представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Сравнение максимального значения модуля разности решения исходной задачи и задачи с использованием двух вариантов метода разделения области ($\Phi_{ddm} \equiv (\xi_{ddm}, u_{ddm}, v_{ddm})^T$ – результаты моделирования с применением метода разделения области)

	вариант 1	вариант 2
$\max \xi - \xi_{ddm} $	$4.53 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-6}$
$\max u - u_{ddm} $	$1.33 \cdot 10^{-5}$	$4.74 \cdot 10^{-6}$
$\max v - v_{ddm} $	$7.66 \cdot 10^{-6}$	$1.28 \cdot 10^{-6}$

Результаты второй главы опубликованы в работах [1, 6].

В третьей главе рассматриваются вопросы совместного использования алгоритмов разделения области и вариационной ассимиляции данных. В главе рассмотрены задачи о восстановлении граничных функций на внешних и внутренних жидких границах, представляющие собой задачу о совместном применении метода разделения области и вариационной ассимиляции данных для открытых акваторий. Задача рассмотрена на примере линеаризованной системы уравнений мелкой воды с ассимиляцией данных как об уровне, так и о скорости на внешней жидкой границе.

На интервале (t_0, t_1) рассматривается следующая подзадача метода расщепления, которая соответствует линеаризованной системе уравнений мелкой воды:

$$\begin{cases} \vec{v}_t + \begin{bmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{bmatrix} \vec{v} + r\vec{v} - g \mathbf{grad} \xi = \vec{f} \text{ в } \Omega \times (t_0, t_1), \\ \xi_t - \mathbf{div} (H_1 \vec{v}) = f_3 \text{ в } \Omega \times (t_0, t_1), \\ \vec{v} = \vec{v}_0, \xi = \xi_0 \text{ при } t = t_0 \text{ в } \Omega, \\ (H_1 \vec{v}) \cdot \vec{n} + m_{op} \sqrt{gH} \xi = m_{op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega \times (t_0, t_1), \end{cases} \quad (6)$$

где $\vec{v} = (u, v)$ – вектор баротропной скорости, ξ – функция уровня, $H(x, y)$ – глубина водоема в точке (x, y) , l – параметр Кориолиса, коэффициент r учитывает силу трения о дно.

Пусть область Ω разделена на две подобласти Ω_1 и Ω_2 кусочно-гладкой липшицевой границей Γ_{in} и \vec{n} – нормаль, направленная наружу из первой подобласти на Γ_{in} (см. рисунок 1). Далее индексами $i = 1, 2$ обозначаются величины в различных подобластях.

Задача (6) может быть записана на каждой из подобластей с условиями сшивки на Γ_{in} вида:

$$\xi^{(1)} = \xi^{(2)}, H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = -H\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2.$$

«Дополнительная неизвестная» ϑ_{sw} на $\Gamma_{in} \times (t_0, t_1)$ выбирается как

$$\vartheta_{sw} \equiv H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = -H\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2.$$

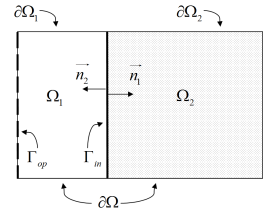


Рисунок 1 – Область Ω .

Сформулирована задача оптимального управления: найти вектор-функцию $\phi = (\vartheta_{sw}, d_s)$, доставляющую минимум функционалу J_α :

$$J_\alpha = \frac{\alpha}{2} \left(\int_{\Gamma_{op}} \sqrt{gH} (d_s - d_s^{(0)})^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} (\vartheta_{sw} - \vartheta_{sw}^{(0)})^2 d\Gamma \right) + \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_{op}} \sqrt{gH} (\xi_1 - \xi_{obs})^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} (\xi_1 - \xi_2)^2 d\Gamma \right),$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации.

Результаты численных экспериментов для исходной задачи и задачи с применением методов ассимиляции и разделения области представлены на рисунке 2. Граница разделения области Γ_{in} представлена линией. Левая граница области являлась внешней жидкой границей Γ_{op} .

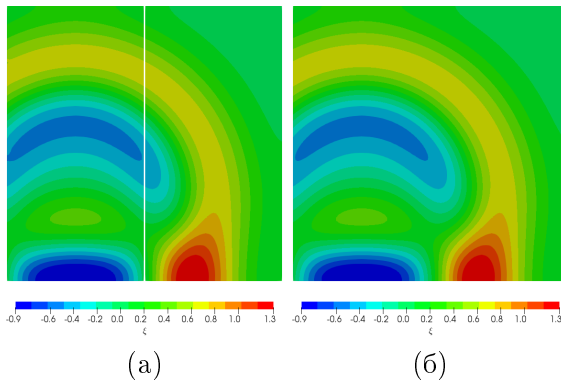


Рисунок 2 – Значение уровня (а) для решения с применением методов ассимиляции и разделения области; (б) для решения тестовой задачи

Если ввести дополнительную неизвестную функцию ϑ_{sw} так, что $\xi_1 = \xi_2 = \vartheta_{sw}$ на Γ_{in} , то получается следующий вид гранич-

ных условий на границе области Ω_1 :

$$\begin{aligned} H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + m_{op}\sqrt{gH}\xi_1 &= m_{op}\sqrt{gH}d_s \quad \text{на } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_{in}, \\ \xi_1 &= \vartheta_{sw} \quad \text{на } \Gamma_{in}, \end{aligned}$$

и на границе области Ω_2 :

$$\begin{aligned} Hv_n^{(2)} &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{in}, \\ \xi_2 &= \vartheta_{sw} \quad \text{на } \Gamma_{in}. \end{aligned}$$

Пусть имеются данные наблюдений $I_{obs} = (H\vec{v}_{obs} \cdot \vec{n})$ вдоль Γ_{op} , прошедшие предварительную обработку. В работе вводится дополнительное условие (условие замыкания):

$$H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = I_{obs} \quad \text{на } \Gamma_{op}. \quad (7)$$

Далее сформулирована задача оптимального управления: найти вектор-функцию $\phi = (\vartheta_{sw}, d_s)$, доставляющую минимум функционалу J_α :

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \frac{\alpha}{2} \left(\gamma \int_{\Gamma_{op}} g\sqrt{gH} (d_s - d_s^{(0)})^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} g\sqrt{gH} (\vartheta_{sw} - \vartheta_{sw}^{(0)})^2 d\Gamma \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\gamma \int_{\Gamma_{op}} \sqrt{\frac{g}{H}} (H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 - I_{obs})^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{\frac{g}{H}} (H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + H\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2)^2 d\Gamma \right), \end{aligned}$$

где $\alpha = \text{const} > 0$, $\gamma = \text{const} > 0$.

Результаты моделирования для функции уровня ξ_i , где $i = 1, 2$, а также исходной задачи, представлены на рисунке 3. Расположение внутренней границы Γ_{in} представлено белой линией. Левая граница области являлась внешней жидкой границей Γ_{op} .

Таким образом, возможно рассматривать совместное применение методов разделения области и вариационной ассимиляции данных на внешней жидкой границе. Постановка задачи была проведена совместно с Шелопут Т. О., численные эксперименты проведены автором лично.

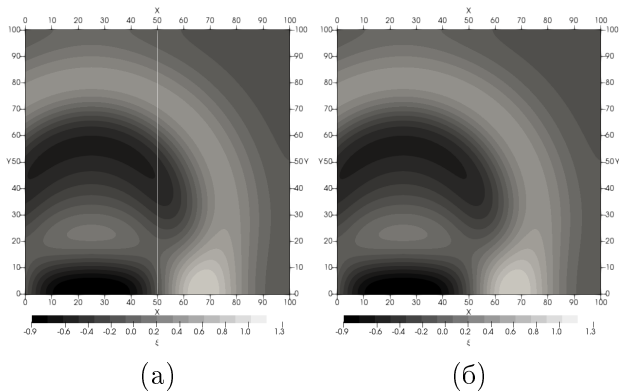


Рисунок 3 – Значение уровня (а) для решения с применением методов ассимиляции и разделения области; (б) для решения тестовой задачи

Результаты третьей главы опубликованы в работах [2, 3].

В четвертой главе описан разработанный комплекс программ и приведены результаты численных экспериментов применения метода разделения области в задачах гидротермодинамики моря для реальной акватории Балтийского моря. Для проверки эффективности использования предложенного метода разделения области был проведен ряд численных экспериментов. Описанный в главе 2 подход к построению алгоритмов разделения области был применен к модели гидротермодинамики Балтийского моря. В рассматриваемой серии экспериментов вся акватория Балтийского моря была разделена на две подобласти (внутренняя граница разделения области представлена пунктирной линией на рисунках 4–6).

Результаты численных экспериментов для задачи о распространении тепла в акватории Балтийского моря с применением алгоритма разделения области представлены на рисунке 4(а). Результаты расчета для акватории без использования метода разделения области представлены на рисунке 4(б).

Результаты численных экспериментов для задачи, соответствующей линеаризованной системе уравнений мелкой воды, с использованием метода разделения области сравнивались с ре-

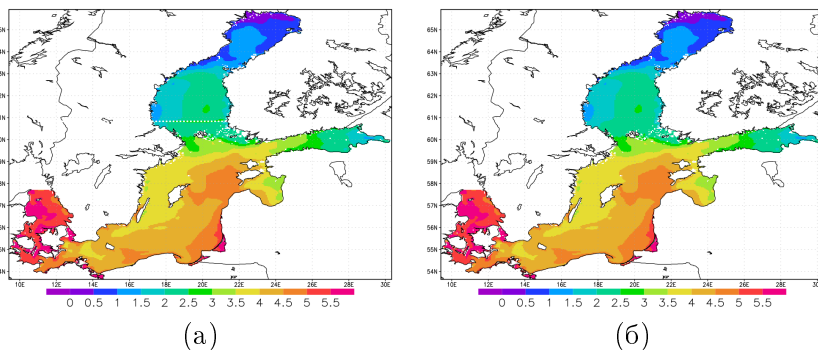


Рисунок 4 – Температура на поверхности моря (а) с использованием метода разделения области; (б) без использования метода разделения области

зультатами моделирования без его применения. Рисунок 5(а) соответствует результатам моделирования динамики Балтийского моря с применением метода разделения области, рисунок 5(б) – без использования данного метода.

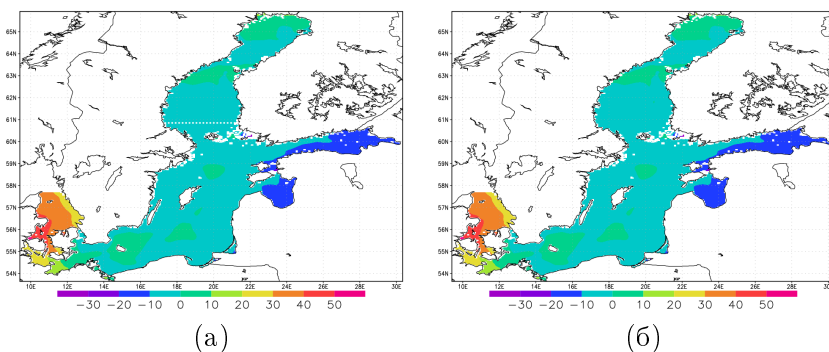


Рисунок 5 – Значение уровня (а) с использованием метода разделения области; (б) без использования метода разделения области

Поля вектора скорости с применением метода разделения области и без применения метода разделения области представлены на рисунке 6.

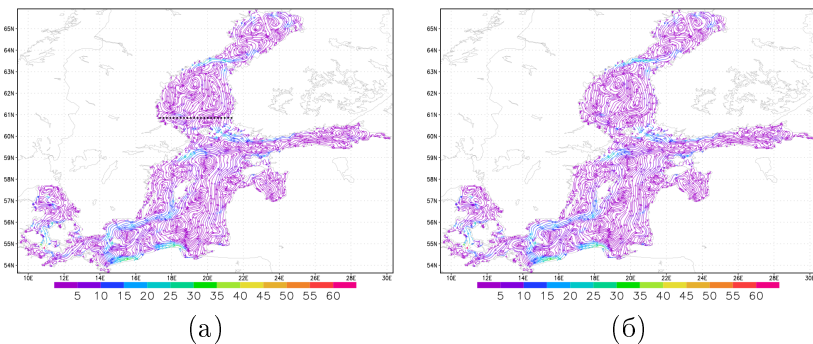


Рисунок 6 – Поле скоростей (а) с использованием метода разделения области; (б) без использования метода разделения области

Результаты использования метода разделения области в задачах моделирования гидротермодинамики Балтийского моря показывают соответствие с результатами моделирования без применения метода разделения области.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [4–6]

В Заключении кратко изложена суть работы и перечисляются основные результаты.

Основные результаты работы

- 1) разработана модификация алгоритма разделения области для задачи конвекции-диффузии, проведено его сравнение с известным методом разделения области и представлены результаты численных экспериментов;
- 2) предложен метод разделения области для линеаризованной системы уравнений мелкой воды, проведено его сравнение и представлены результаты численных экспериментов;
- 3) проведено численное исследование совместного применения методов разделения области и вариационной ассимиляции данных;
- 4) разработан комплекс программ для использования метода

разделения области в модели гидротермодинамики Балтийского моря.

Список публикаций

1. Agoshkov V. I., **Lezina N. R.**, Parmuzin E. I., Sheloput T. O., Shutyaev V. P., Zakharova N. B. Methods of variational data assimilation and their application in problems of hydrothermodynamics of marine water areas // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2020. — Vol. 35, no. 4. — P. 189–202.
2. Агошков В. И., **Лёзина Н. Р.**, Шелопут Т. О. Восстановление граничных функций на внешних и внутренних жидких границах в задаче гидродинамики открытой акватории // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т. 60, №11. — С. 1915–1932.
3. Agoshkov V., **Lezina N.**, Sheloput T. Domain decomposition method for the variational assimilation of the sea level in a model of open areas hydrodynamics // Journal of Marine Science and Engineering. — 2019. — Vol. 7, no. 6 (195).
4. Agoshkov V. I., Aseev N. A., Zakharova N. B., **Lezina N. R.**, Parmuzin E. I., Sheloput T. O., Shutyaev V. P. Informational Computational System “INM RAS-Baltic Sea” in the problem of operational forecasting of the marine environment state and assessment of risks of oil pollution // 2018 IEEE/OES Baltic International Symposium (BALTIC) / IEEE. — 2018. — P. 1–9.
5. Шелопут Т. О., **Лезина Н. Р.** Совместная реализация методов ассимиляции данных на «жидкой» границе и разделения области в акватории Балтийского моря // Вестник Тверского государственного университета, Серия: География и геоэкология. — 2018. — №3. — С. 168–179.
6. Agoshkov V. I., **Lezina N. R.** New approaches to the formulation of domain decomposition method and algorithm of the large-block parallelization for mathematical modeling problems // Computational Mathematics and Information Technologies. — 2017. — no. 2. — P. 14–20.