На правах рукописи

Сазонов Александр Михайлович

Методы анализа динамики эндогенного технологического развития

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Петрозаводск – 2021

Работа выполнена в *Институте прикладных математических исследований — обособленном подразделении Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального исследовательского центра «Карельский научный центр Российской академии наук»*.

Научный руководитель: **Кириллов Александр Николаевич**
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Олемской Игорь Владимирович**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных систем ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Смирнов Николай Васильевич
кандидат технических наук, доцент кафедры теории вероятностей и анализа данных
ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»

Защита состоится «24» декабря 2021 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета *Д 212.190.03* при *ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет»*, расположенном по адресу: *185910, Республика Карелия, г. Петрозаводск, пр. Ленина, д. 33.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Петрозаводского государственного университета и на сайте petrsu.ru.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета *Воронов Роман Владимирович*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Довольно долго моделирование научно-технического прогресса опиралось на представления об экзогенности технологических изменений. Вследствие этого последствия возникновения новых технологий изучались без учета механизма их распространения. Однако в начале XX века австрийский экономист Й. Шумпетер разработал теорию эндогенного распространения инноваций. В данной теории механизм инновационных изменений представлен как сочетание двух эндогенных процессов развития: инновационного и имитационного. Инновационный процесс — это процесс создания новых технологий, а имитационный — их заимствования. В настоящее время очевидно, что экономическое развитие осуществляется посредством внедрения и распространения новых технологий, что, в свою очередь, вызывает структурные изменения в экономике. Предложенная Й. Шумпетером концепция творческого разрушения позволяет описать такие структурные изменения. Таким образом, описание и изучение процессов внедрения новых технологий является крайне важной задачей. Понимание того, как происходит научно-технический прогресс, необходимо для прогнозирования и разработки стратегий развития экономики.

Следует отметить, что инновационная активность крайне важна для экономического развития, поскольку не всегда есть возможность заимствовать технологии. Зачастую новые технологии и разработки представляют коммерческую или государственную тайну. Однако развитие экономики исключительно инновационным путем требует гораздо более существенных финансовых вложений по сравнению с имитационным. Более того, если отрасль находится в отстающем положении, достичь уровня передового развития исключительно за счет инноваций значительно сложнее, чем имитируя уже существующие технологии, поскольку инновационная активность требует больших временных затрат. В то же время имитационный путь развития исключает возможность достижения передового технологического уровня и, тем более, опережения. Таким образом, необходимо соблюдать баланс между инновационной и имитационной деятельностью.

Выводы о развитии экономических систем, сделанные исключительно при помощи эмпирических наблюдений, неоднозначны. Помимо этого, прогнозы, сделанные на основе эмпирических исследований, как правило, не являются достаточно точными. Таким образом, задача перехода к исследованиям экономического развития на языке математических моделей является актуальной. Кроме того, математическая формализация процессов экономического развития позволяет осуществлять прогнозирование посредством анализа математических моделей.

Цели и задачи диссертационной работы: Целью диссертационной работы является разработка методов математического моделирования, численных методов и комплекса программ для описания и качественного исследования шумпетеровской динамики распределения капитала.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Построение и аналитическое исследование математических моделей шумпетеровской динамики распределения капитала, учитывающих ограниченность экономического роста (пункты 1, 2 паспорта специальности 05.13.18).

2. Разработка алгоритма численного моделирования шумпетеровской динамики распределения капитала (пункт 3 паспорта специальности 05.13.18).

3. Разработка программного комплекса для реализации алгоритма численного моделирования шумпетеровской динамики распределения капитала (пункт 4 паспорта специальности 05.13.18).

Научная новизна. Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Построены и качественно исследованы математические модели шумпетеровской динамики распределения капитала, учитывающие ограничен-

ность экономического роста.

2. Доказаны теоремы о глобальной устойчивости равновесий.

3. Разработан алгоритм численного моделирования шумпетеровской динамики распределения капитала.

4. Разработан программный комплекс для реализации алгоритма численного моделирования шумпетеровской динамики распределения капитала.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы состоит в следующем:

1. Предложен подход к моделированию динамики распределения капитала по уровням эффективности, учитывающий ограниченность экономического роста.

2. Доказаны теоремы о глобальной устойчивости равновесий разработанным методом.

3. Предложен подход к моделированию циклического процесса внедрения технологии.

Практическая значимость работы состоит в следующем:

1. Разработан метод математического моделирования динамики распределения капитала по уровням эффективности, позволяющий осуществлять прогнозирование.

2. Разработан программный комплекс для численного моделирования динамики распределения капитала по уровням эффективности.

Положения, выносимые на защиту:

1. Методы математического моделирования динамики распределения капитала по уровням эффективности с общей экономической нишей (пункты 1, 2 паспорта специальности 05.13.18).

2. Методы математического моделирования динамики распределения капитала по уровням эффективности с различными экономическими нишами (пункты 1, 2 паспорта специальности 05.13.18).

3. Алгоритм численного моделирования шумпетеровской динамики распределения капитала (пункт 3 паспорта специальности 05.13.18).

4. Программный комплекс для реализации алгоритма численного моделирования шумпетеровской динамики распределения капитала (пункт 4 паспорта специальности 05.13.18).

Часть результатов диссертации получена в рамках исследований, проводимых по гранту РФФИ 18-01-00249а.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих международных научных конференциях:

1. III Международный экономический симпозиум — 2018, Кириллов А.Н., Сазонов А.М. Математические модели динамики распределения капитала отрасли по технологическим уровням. 19—21 апреля 2018 г., Санкт-Петербург, Россия.

2. Международная научная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» (DSSCO'18) к 100-летию со дня рождения Е.А. Барбашина, Кириллов А.Н., Сазонов А.М. Динамика распределения капитала по технологическим уровням. 24—29 сентября 2018 г., Минск, Беларусь.

3. LI международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» Control Processes and Stability (CPS'20), Сазонов А.М. Математическое моделирование эндогенного экономического развития 6—10 апреля 2020 г., Санкт-Петербург, Россия.

4. IV международная научная конференция «Устойчивость и процессы управления» Stability and Control Processes (SCP'20) памяти профессора В.И. Зубова, Kirillov A.N., Sazonov A.M. Economic Evolution with Structural Variations. 5—9 октября 2020 г., Санкт-Петербург, Россия.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 9 работах, из которых 4 статьи в изданиях, входящих в Перечень рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации (включая 2 статьи в журналах, индексируемых в библиографических базах Web of Science и Scopus [1, 3]; 1 статью в журнале, индексируемом в библиографической базе Scopus [2]; 1 статью в журнале Перечня [4]), 3 тезиса докладов [6–8]. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [9].

Личный вклад автора. Основные результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором.

Структура и объем диссертации. Общий объем диссертации составляет 126 страниц. Список литературы содержит 117 наименований.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка используемой литературы.

Во Введении обоснованы актуальность, значимость работы; определены цель и задачи исследования; перечислены результаты исследования, в которых состоит новизна, теоретическая и практическая значимость работы; сформулированы основные положения, выносимые на защиту; дано краткое изложение содержания работы по главам.

В первой главе диссертации приведен обзор существующих работ по темам исследований, проводимых в данной работе. Описаны математические модели шумпетеровской динамики, разработанные В.М. Полтеровичем, Г.М. Хенкиным, А.А. Шананиным, на основе которых разрабатывались модели, представленные в диссертации. В данных моделях рассматривается экономическая система (например, отрасль), в которой предприятия упорядочены по уровням эффективности. Критерии разбиения на уровни могут быть различны. Уровни эффективности пронумерованы, и предполагается, что более высоким уровням соответствуют большие номера. Основная гипотеза состоит в том, что предприятия переходят на следующий более высокий уровень эффективности посредством инновационной и имитационной деятельности.

Рассмотрим базовую модель шумпетеровской динамики распределения предприятий по уровням эффективности, представленную в работе В.М. Полтеровича, Г.М. Хенкина. Пусть $F_i(t)$ — доля предприятий, находящихся в момент времени t на уровнях с номером, не больше, чем i. Тогда, уравнение эволюции, описывающее динамику распределения предприятий по уровням, имеет вид

$$\dot{F}_i = \frac{dF_i}{dt} = -(\alpha + \beta(1 - F_i(t)))(F_i(t) - F_{i-1}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

с граничными и начальными условиями вида

$$F_0(t) \equiv 0, 0 < F_{i-1}(0) < F_i(0) < 1, \text{ если } 1 < i < N, F_i(0) = 1, \text{ если } i \geqslant N,$$

где N — число уровней в начальный момент времени, $\alpha > 0$ — интенсивность иннноваций, $\beta > 0$ — интенсивность имитаций. В правой части уравнения (1) можно выделить два слагаемых, первое из которых — $-\alpha(F_i - F_{i-1})$ характеризует процесс инноваций, а второе слагаемое — $-\beta(1 - F_i)(F_i - F_{i-1})$ — процесс имитаций. Скорость роста первого слагаемого пропорциональна доле (или, что то же самое, числу) предприятий на уровне i. Вклад, который вносит второе слагаемое, будет существенным только при условии, что значительная часть предприятий находится на уровнях с номерами больше i.

Кроме того, была предложена модификация базовой модели (1), учитывающая действие процесса амортизации фондов, вследствие которого предприятия понижают уровень эффективности. Данная модификация была успешно применена на практике для численного исследования динамики распределения предприятий черной металлургии по уровням эффективности, упорядоченным по рентабельности. Эмпирические данные, полученные в результате этого численного исследования согласуются с теоретическими. Следует отметить, что модели с амортизацией были исследованы только численно, поэтому задача аналитического исследования таких моделей, поставленная В.М. Полтеровичем, Г.М. Хенкиным, является актуальной.

Рассмотрим теперь модель динамики мощностей, в которой конкретизировано понятие уровня эффективности. В этой модели предполагается, что уровни различаются прибылью, получаемой за единицу времени от единичной мощности, которую будем обозначать $\lambda_i > 0$. Предполагается, что с увеличением номера i эффективность возрастает, то есть, $\lambda_i < \lambda_{i+1}, i = 1, 2 \ldots$. Кроме того, предполагается, что существует предел $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \lambda$, и $\sum_{i=1}^{\infty} i(\lambda - \lambda_i) < \infty$. Пусть $M_i(t)$ — суммарная мощность предприятий, нахоядщихся на уровне i. Тогда уравнение динамики мощностей имеет вид

$$\dot{M}_i = (1-\varphi_i)\lambda_i M_i + \varphi_{i-1}\lambda_{i-1}M_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

с граничными и начальными условиями вида

$$M_0(t) \equiv 0, M_i(0) \geqslant 0, \sum_{i=1}^{N} M_i(0) > 0, M_i(0) = 0, \text{ если } i > N,$$

где N — число уровней в начальный момент времени. Здесь $\varphi_i = \alpha + \beta(1 - F_i(t))$, постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — интенсивность инноваций и имитаций соответственно, а распределение $F_i(t)$ имеет вид

$$F_i(t) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{i} M_k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} M_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

Однако данная модель имеет недостаток, заключающийся в том, что в ней не учитывается ограниченность возможностей экономического роста, обусловленная, например, ограниченностью объемов рынков сбыта, ресурсной базы и другими факторами. Отметим, что данный недостаток не влияет на полученные результаты, поскольку в данных исследованиях изучается распределение $F_i(t)$. Покажем, что $M_i(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то есть рост мощностей неограничен. Рассмотрим уравнение для $i = 1$

$$\dot{M}_1 = (1 - \varphi_1)\lambda_1 M_1.$$

Подставив в него выражение для φ_1, получим

$$\dot{M}_1 = (1 - \alpha - \beta + \beta \frac{M_1(t)}{\sum_{k=0}^{\infty} M_k(t)})\lambda_1 M_1.$$

Далее покажем, что $F_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Согласно результатам, полученным В.М. Полтеровичем и Г.М. Хенкиным, $|F_1(t) - F_1^*(t)| \to 0$ при $t \to \infty$, где $F_1^*(t) = (1 + A(\frac{\alpha}{\alpha+\beta})^n e^{\beta t})^{-1}$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $T_1 > 0$, такое что $|F_1^*(t) - F_1(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $t > T_1$. Очевидно, $F_1^*(t) \to 0$ при $t \to \infty$, т.е. для того же $\varepsilon > 0$ существует $T_2 > 0$, такое что при $t > T_2$ $F_1^*(t) < \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $T = \max(T_1, T_2) > 0$, такое что $F_1(t) < F_1^*(t) + |F_1^*(t) - F_1(t)| < \varepsilon$ при $t > T$, т.е. $F_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Теперь предположим, что $\alpha + \beta \geqslant 1$. Тогда

$$0 \leqslant 1 - \varphi_1(t) = 1 - \alpha - \beta + \beta F_1(t) < 1 - \alpha - \beta + \beta\varepsilon \leqslant 1, \text{ при } t > T.$$

Если $\varepsilon < \frac{\alpha+\beta-1}{\beta}$, то $1 - \varphi_1 < 1 - \alpha - \beta + \beta\varepsilon < 0$, что противоречит $0 \leqslant \varphi_i(t) \leqslant 1$. Значит, $\alpha + \beta < 1$.

Заметим, что, поскольку $0 < \alpha + \beta < 1$, то существует $\sigma > 0$ такое, что $\sigma < 1 - \alpha - \beta < 1 - \alpha - \beta + \beta\frac{M_1(t)}{\sum_{k=0}^{\infty} M_k(t)}$. Таким образом, имеем

$$\dot{M}_1 = (1 - \alpha - \beta + \beta \frac{M_1(t)}{\sum_{k=0}^{\infty} M_k(t)})\lambda_1 M_1 > \sigma\lambda_1 M_1.$$

Интегрируя это неравенство на промежутке $[0, t]$, получим

$$M_1 > M_1^0 e^{\sigma\lambda_1 t} \to \infty,$$

где $M_1^0 = M_1(0)$. Таким образом, $M_1(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Теперь, учитывая (2), при $i \geqslant 2$, получим

$$\dot{M}_i = (1-\varphi_i)\lambda_i M_i + \varphi_{i-1}\lambda_{i-1}M_{i-1} > (1-\varphi_i)\lambda_i M_i.$$

Проведя рассуждения аналогичные случаю $i = 1$, и используя то, что $\varphi_i = (\alpha + \beta(1 - \frac{\sum_{k=0}^{i} M_k}{\sum_{k=0}^{\infty} M_k}))$, получим $M_i(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

В представленной работе будут предложены математические модели динамики капитала по уровням эффективности, в которых учитывается ограниченность возможностей экономического роста посредством использования уравнений логистического типа: $\dot{C} = aC(V - C)$, где $C(t)$ — суммарный капитал отрасли, V — емкость экономической ниши (ЕЭН).

Определение 1. *Емкостью экономической ниши (ЕЭН) называется некоторая предельная величина суммарного капитала, при которой скорость роста снижена настолько, что увеличение капитала не происходит.*

Далее в первой главе представлены работы, в которых для описания экономического развития используются модели логистического роста.

Во второй главе приведены математические модели шумпетеровской динамики капитала отрасли по уровням эффективности с общей экономической нишей. В параграфе 2.1 представлена основная модель шумпетеровской динамики капитала по уровням эффективности с общей экономической нишей емкостью $V > 0$. Экономическая интерпретация этого случая следующая: предприятия на разных уровнях эффективности конкурируют между собой в общей экономической нише. Таким образом, уровни эффективности различаются либо используемыми технологиями, либо организацией производственного процесса.

Динамика распределения капитала в этом случае описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = \frac{1-\varphi_1}{\lambda_1} C_1(V - C_1 - \ldots - C_N) = f_1(C_1, \ldots, C_N), \\ \dot{C}_i = \frac{1-\varphi_i}{\lambda_i} C_i(V - C_1 - \ldots - C_N) + \varphi_{i-1}C_{i-1} = f_i(C_1, \ldots, C_N), \quad i = 2, \ldots, N. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь, C_i — суммарный капитал отрасли на уровне i (одно и то же предприятие может иметь капитал на различных уровнях), $V > 0$ — емкость экономической ниши, $\varphi_i \in (0,1)$ — доля средств, которую предприятия на уровне i тратят на развитие производства на уровне $i+1$, $\lambda_i > 0$ — удельная себестоимость производства товара на уровне i (стоимость производства единицы товара в единицу времени). Все указанные выше величины, за исключением $C_i(t)$, полагаются константами. Предполагается, что чем больше i, тем выше уровень.

Замечание 1. *Естественно считать, что* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$*, поскольку чем выше уровень эффективности, тем технология, используемая на нем, более развитая, что снижает удельную себестоимость производства.*

Замечание 2. *Следует отметить, что матрица Якоби в точке равновесия* P *имеет нулевые собственные значения, кроме одного отрицательного, что не позволяет исследовать локальную устойчивость равновесия посредством метода линейного приближения.*

Для данной модели получены следующие результаты.

Утверждение 1. *Все положительные полутраектории входят в параллелипипед*

$$K = \{(C_1, \ldots, C_N) \in \mathbb{R}^N : 0 \leqslant C_1 \leqslant V, \quad 0 \leqslant C_i \leqslant \max(\frac{\varphi_{i-1}}{a_i}, V), \quad i = 2, \ldots, N\}$$

и не покидают его.

Теорема 1. *Положение равновесия* $P = (0, \ldots, V)$ *системы (4) глобально устойчиво в* $\mathbb{R}_+^N \setminus \{O\}$*.*

Доказанная теорема о глобальной устойчивости позволяет прогнозировать состояние экономической системы в долгосрочной перспективе. Глобальная устойчивость равновесия $P = (0, \dots, 0, V)$ с экономической точки означает, что самый высокий уровень эффективности побеждает в конкуренции, поскольку весь суммарный капитал постепенно переходит на этот уровень.

В параграфе 2.4 качественно аналитически исследована модель, учитывающая действие процесса амортизации, в результате которого предприятия понижают уровень эффективности, описываемая следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = \frac{1-\varphi_1}{\lambda_1} C_1 (V - \sum\limits_{j=1}^{N} C_j) + \mu_2 C_2 = f_1(C), \\ \dot{C}_i = \frac{1-\varphi_i}{\lambda_i} C_i (V - \sum\limits_{j=1}^{N} C_j) + \varphi_{i-1} C_{i-1} - \mu_i C_i + \mu_{i+1} C_{i+1} = f_i(C), i = 2, \dots, N-1, \\ \dot{C}_N = \frac{1-\varphi_N}{\lambda_N} C_N (V - \sum\limits_{j=1}^{N} C_j) + \varphi_{N-1} C_{N-1} - \mu_N C_N = f_N(C), \end{cases} \tag{5}$$

где, μ_i — доля капитала, переходящего на более низкий уровень эффективности вследствие амортизационного процесса, $i = 2, \dots, N$. Здесь, $V > 0$, $0 < \varphi_i < 1$, $0 < \mu_i < 1$, $\lambda_i > 0$ полагаются постоянными.

Теорема 2. *Каждая положительная полутраектория* $r(C^0), C^0 \in \mathbb{R}_+^N$ *входит в множество* $W = \{(C_1, \dots, C_N) : V \leqslant \sum\limits_{j=1}^{N} C_j \leqslant V + \Delta V\}$, *где* $\Delta V = \sum\limits_{j=1}^{N-1} \frac{\varphi_j}{a_j}$ *и не покидает его.*

Замечание 3. *Теорема 2 означает, что множество* W *является глобальным аттрактором.*

Для двумерной модели с амортизацией получен результат о глобальной устойчивости равновесия.

Теорема 3. *Положение равновесия* $C^* = (C_1^*, C_2^*)$ *системы (5) при* $N = 2$ *глобально устойчиво в* $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{O\}$, *где* $C_1^* = \frac{(2a_1a_2V + A)\mu}{2a_1a_2\mu + a_1A}$, $C_2^* = \frac{(2a_1a_2V + A)\mu}{2a_1a_2\mu + a_1A} \frac{A}{2a_2\mu}$, $A = -a_1\mu + \sqrt{a_1^2\mu^2 + 4a_1a_2\varphi\mu}$.

Глобальная устойчивость положения равновесия означает стагнацию с экономической точки зрения, что является крайне неблагоприятной ситуацией. Дальнейшее экономическое развитие в ситуации стагнации, когда невозможны эволюционные изменения, согласно концепции творческого разрушения Шумпетера, требует структурных изменений в экономике. В качестве таких изменений в параграфе 2.6 предлагается переменная размерность модели. На основании глобальной устойчивости равновесия предложены сценарии появления и исчезновения уровней эффективности. В последнем параграфе предлагается модель циклического процесса внедрения новой технологии, в которой в качестве структурных изменений выступает переключение двумерных моделей шумпетеровской динамики распределения капитала между собой. Формализованы процессы успешного и неудачного внедрения технологии. Показана цикличность процесса внедрения технологии, что является часто встречаемой чертой экономических процессов.

Результаты второй главы опубликованы в работах [2, 3].

В третьей главе представлены математические модели шумпетеровской динамики капитала отрасли по уровням эффективности с различными экономическими нишами. В параграфе 3.1 представлена основная модель шумпетеровской динамики капитала по уровням эффективности с различными экономическими нишами $V_i > 0$ для уровней в виде системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = \frac{1-\varphi_1}{\lambda_1} C_1(V_1 - C_1) = f_1(C_1), \\ \dot{C}_i = \frac{1-\varphi_i}{\lambda_i} C_i(V_i - C_i) + \varphi_{i-1} C_{i-1} = f_i(C_{i-1}, C_i), i = 2, \dots, N. \end{cases} \tag{6}$$

В данной постановке предполагается, что между уровнями эффективности нет конкуренции, поскольку для каждого из них существует своя экономическая ниша. Это возможно, например, в случае, если уровни различаются видом производимого товара. Чем выше уровень, тем выше качество, сложность, технологичность товара, товары на высоких уровнях более новые, чем на низких. Кроме того, естественно считать, что удельная себестоимость производства товара снижается при увеличении номера уровня эффективности, то есть, $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_N$.

Для данной модели получены следующие результаты.

Теорема 4. *Положение равновесия* $P = (V_1, C_2^*, \ldots, C_N^*)$ *локально асимптотически устойчиво, остальные положения равновесия неустойчивы.*

Теорема 5. *Положение равновесия* $P = (V_1, C_2^*, \ldots, C_N^*)$ *глобально устойчиво в* $\mathbb{R}_+^N$.

Теорема 5 позволяет давать прогнозы относительно поведения экономической системы.

В параграфе 3.2 предложена модель со структурными изменениями в виде переменной размерности системы. На основе глобальной устойчивости равновесия предложены сценарии появления и исчезновения уровней эффективности, а также перераспределение емкостей экономических ниш с целью моделирования дискретной технологической волны, которая в некотором смысле является аналогом волны, полученной В.М. Полтеровичем и Г.М. Хенкиным.

В параграфе 3.3 описана модель шумпетеровской динамики капитала отрасли с различными экономическими нишами с интеллектуальным капиталом. Цель данной модификации состояла в том, чтобы предложить такой сценарий появления нового уровня эффективности, в котором появление нового уровня зависело бы только от одного параметра, а не от произвольного числа параметров, как в случае основной модели.

Введем понятие интеллектуального капитала: накопления на научные исследования и их внедрение в производство, получаемые за счет инвестиций предприятий, находящихся на самом высоком уровне. Пусть I — интеллектуальный капитал, $\nu > 0$ — интенсивность научных исследований. Обозначим, $\psi \in (0, 1)$ — доля вложений на научные разработки, остальные средства накапливаются для открытия нового уровня $N + 1$. Все указанные выше величины, за исключением $I(t)$, полагаются постоянными. Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = \frac{1-\varphi_1}{\lambda_1} C_1(V_1 - C_1) = f_1(C_1), \\ \dot{C}_i = \frac{1-\varphi_i}{\lambda_i} C_i(V_i - C_i) + \varphi_{i-1} C_{i-1} = f_i(C_{i-1}, C_i), i = 2, \ldots, N, \\ \dot{I} = -\nu I + \psi \varphi_N C_N = g. \end{cases} \tag{7}$$

Основным результатом для данной модели является следующая теорема.

Теорема 6. *Положение равновесия* $P = (V_1, C_2^*, \ldots, C_N^*, I^*)$ *глобально устойчиво в* $\mathbb{R}_+^{N+1}$.

На основе теоремы о глобальной устойчивости предложен сценарий появления нового уровня эффективности на основе динамики интеллектуального капитала в момент достижения интеллектуальным капиталом порогового значения, достаточно близкого к равновесному I^*. Кроме того, получено необходимое условие появления нового уровня, смысл которого в том, что скорость роста капитала на новом уровне должна быть положительной, то есть, производство на новом уровне должно приносить прибыль.

В параграфе 3.5 предложенный подход к моделированию ограниченного экономического роста был применен для моделирования иного многоступенчатого иерархического процесса, а именно, процесса биологической очистки сточных вод. Рассмотрим систему очистки, в которую входят аэротенк, состоящий из n компартментов, отстойник и звено рециркуляции. При этом скорость очистки описывается функцией Моно. Пусть интенсивность подачи активного ила равна u. Получим следующую динамическую систему, описывающую динамику концентрации микроорганизмов в каждом компартменте

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Q + \gamma_1 s_1 x_1 (V_1 - x_1) - (u+b) x_1, \\ \dot{s}_1 = R - \frac{1}{Y} \gamma_1 s_1 x_1 (V_1 - x_1) - (u+b) s_1, \\ \dot{x}_i = \gamma_i s_i x_i (V_i - x_i) + (u+b) x_{i-1} - (u+b) x_i, \\ \dot{s}_i = -\frac{1}{Y} \gamma_i s_i x_i (V_i - x_i) + (u+b) s_{i-1} - (u+b) s_i, \\ i = 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{8}$$

где s_i, x_i — концентрация субстрата-загрязнителя и концентрация микроорганизмов в i-м компартменте, соответственно, V_i — максимально возможная концентрация микроорганизмов в i-м компартменте, Y — коэффициент утилизации субстрата-загрязнителя в биомассу микроорганизмов, γ_i — максимальная удельная скорость роста микроорганизмов, b — скорость субстрата на входе. При этом входной поток $Q = Q(u)$ пропорционален скорости возвратного потока u, входной поток субстратов R полагается кусочно-постоянным. Будем считать параметры системы, если не оговорено особо, постоянными.

Поставлена и решена задача стабилизации процесса биоочистки, а именно, нахождения постоянной скорости $u > 0$ возвратного потока активного ила такой, что

$$s_u(t) \leqslant c_1, \quad x_u(t) \leqslant c_2 \tag{9}$$

при $t \geqslant t^*$, где c_1, c_2, t^* — положительные постоянные.

Кроме того, получены следующие результаты.

Теорема 7. *Система (8) имеет единственное положение равновесия* $y^* \in \mathbb{R}_+^{2n}$.

Теорема 8. *Положение равновесия системы (8)* $y^* \in \mathbb{R}_+^{2n}$ *глобально устойчиво в* $\mathbb{R}_+^{2n}$.

Полученные результаты позволяют прогнозировать состояние системы (8) для любого управления u.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [1, 4, 5].

Четвертая глава посвящена построению алгоритмов и комплекса программ для численного моделирования шумпетеровской динамики распределения капитала. Приведем алгоритм с общей экономической нишей с переменным числом уровней эффективности.

Шаг 0. Задаем значения параметров N_0, V, ε, δ, λ_i, α_i, β_i, C_i^0, $i = 1, \ldots, N$.

Шаг j. Численно решаем систему методом, описанным в первом разделе.

Если $C_1^j < \varepsilon$, то первый уровень исчезает, размерность системы уменьшается от N_j до $N_j - 1$, $\gamma_1 = 0$.

Если $\rho(C^j, P) \leqslant \delta$, где $P = (0, \ldots, 0, V)$, то появляется новый уровень $N_j + 1$, размерность системы увеличивается от N до $N_j + 1$, $\gamma_{N_j+1} = 1$.

Приведем несколько примеров работы программы, реализующей численный метод решения систем шумпетеровской динамики, подтверждающих глобальную устойчивость положений равновесия.

Численное решение двумерной системы с общей ЭН без амортизации (рис. 1). Используются следующие значения параметров: $V = 100$, $\varphi(C) = \alpha_1 + \beta_1 \frac{C_2}{C_1 + C_2}$, $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.2$.

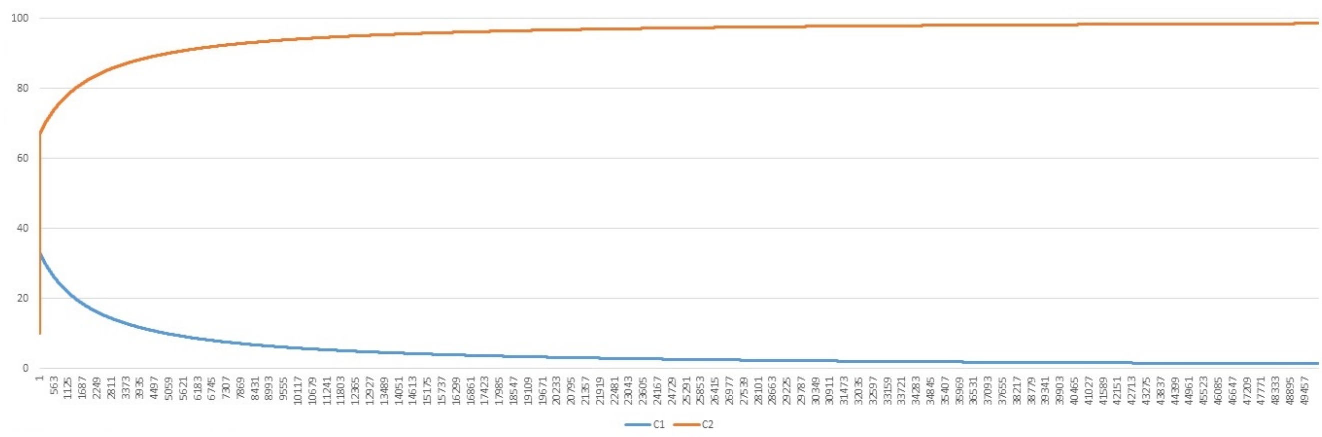

Рис. 1. Численное решение двумерной системы с общей ЭН без амортизации.

Численное решение трехмерной системы с общей ЭН без амортизации (рис. 2). Используются следующие значения параметров: $V = 100$, $\varphi_1(C) = \alpha_1 + \beta_1 \frac{C_2 + C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$, $\varphi_2(C) = \alpha_2 + \beta_2 \frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$, $\alpha_1 = 0.1$, $\beta_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$,

$\alpha_3 = 0.3$.

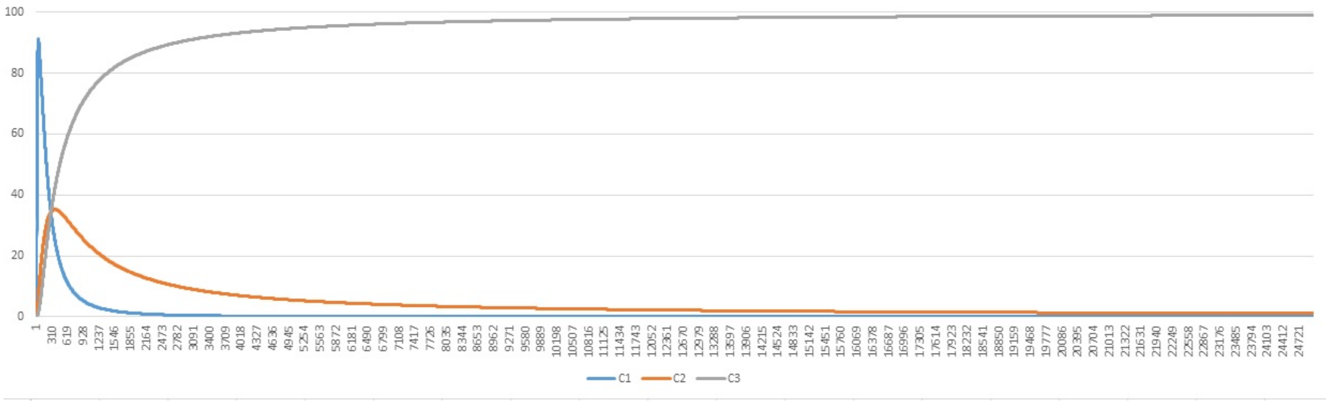

Рис. 2. Численное решение трехмерной системы с общей ЭН без амортизации.

Представленные результаты численных экспериментов подтверждают глобальную устойчивость положений равновесия, теоретически обоснованную в предыдущих главах. Верхний уровень побеждает в конкуренции и занимает всю экономическую нишу, в то время как капитал на нижних уровнях стремится к нулю.

Численное решение двумерной системы с общей ЭН с амортизацией (рис. 3). Используются следующие значения параметров: $V = 100$, $\varphi(C) = \alpha_1 + \beta_1(1 - F_i(C))$, $\alpha = 0.1, \beta = 0.3$, $\mu = 0.08$, $\alpha_2 = 0.2$.

Как видно из результатов численного эксперимента, в случае системы с амортизацией, нижний уровень не исчезает, а экономическая ниша делится между уровнями, что согласуется с теоретическими результатами, полученными ранее.

Также в четвертой главе приведен пример, демонстрирующий важность инновационной деятельности для двумерной системы с амортизацией вида

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = \frac{1-\varphi(C)}{\lambda_1} C_1(V - C_1 - C_2) + \mu C_2, \\ \dot{C}_2 = \frac{1}{\lambda_2} C_2(V - C_1 - C_2) + \varphi(C) C_1 - \mu C_2, \end{cases} \tag{10}$$

где $\varphi(C) = \alpha + \beta\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)$. Пусть $\alpha = 0$, то есть, инновационная деятельность на первом уровне отсутствует. Тогда, помимо глобально устойчивого положения равновесия P у системы (10) существует положение равновесия $Q = (V, 0)$,

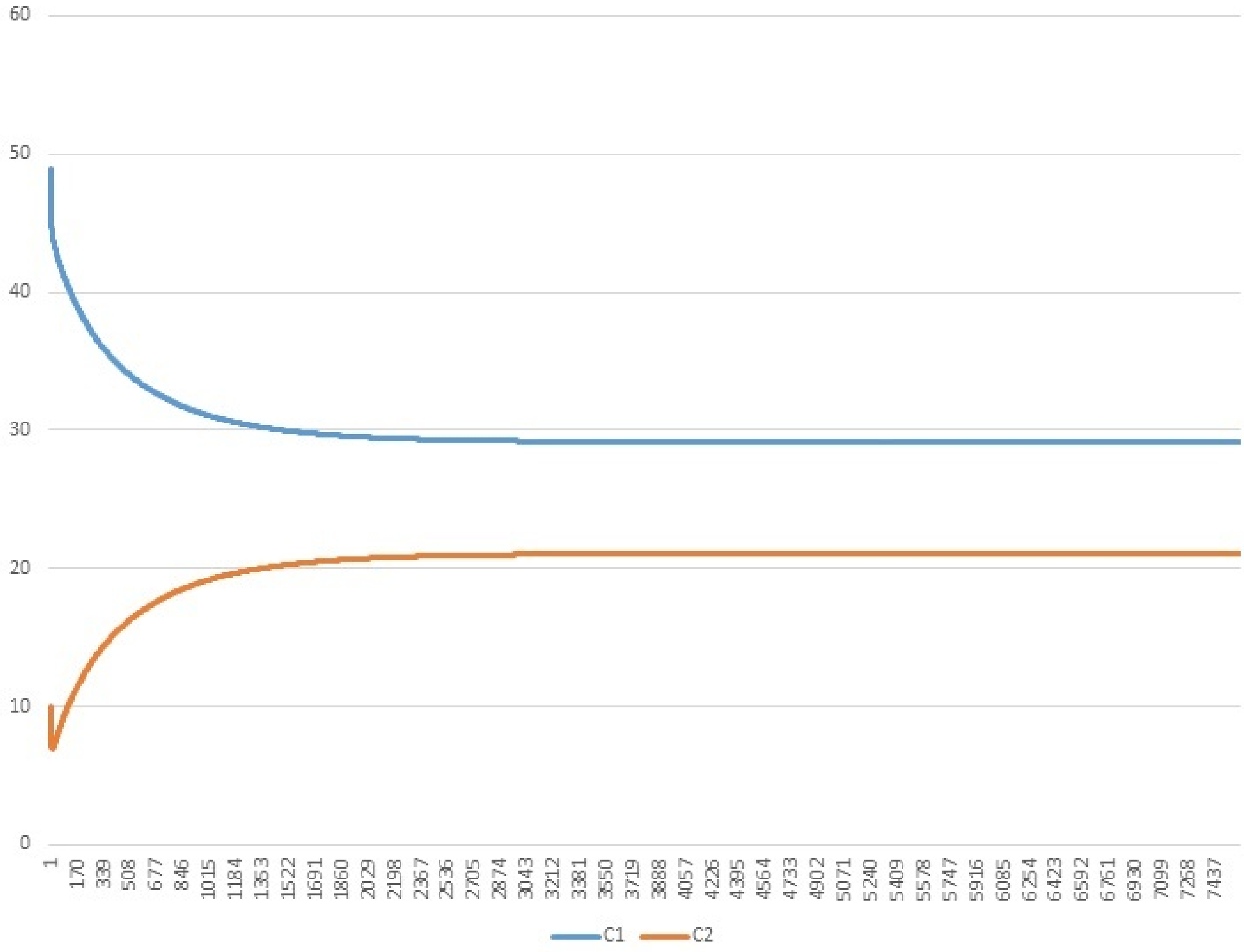

Рис. 3. Численное решение двумерной системы с общей ЭН с амортизацией.

к которому приближаются положительные полутраектории с начальными точками $C^0 = (C_1^0, 0)$, находящимися на оси C_1. Тогда, по теореме об интегральной непрерывности, для любых $\varepsilon > 0$, $T > 0$ существует $\delta > 0$ такая, что если $\rho(\tilde{C}^0, C^0) < \delta$, то $\rho(\tilde{C}(t), C(t)) < \varepsilon$ при $t \leqslant T$, где $\tilde{C}(0) = \tilde{C}^0$. Таким образом, имеем, что при очень малых начальных $C_2^0 > 0$ положительные полутраектории на протяжении сколь угодно большого времени T не выйдут из ε-окрестности $U_\varepsilon(Q)$ равновесия $Q = (V, 0)$. С экономической точки зрения это означает, что рост капитала на втором уровне практически не наблюдается на протяжении сколь угодно большого времени T, что, в свою очередь, является крайне неблагоприятной ситуацией в экономике.

Согласно результатам численных экспериментов при малом начальном значении $C_2^0 > 0$ рост капитала $C_2(t)$ на втором уровне существенно замедляется. Таким образом, можно сделать вывод, что отсутствие инноваций на первом уровне при крайне слабом начальном развитии второго уровня приводит к существенному замедлению темпов экономического развития. Данное наблюдение демонстрирует важность инновационной активности для развития экономики и наглядно показывает, что необходимо заниматься инновационной деятельностью, инвестировать средства в научные разработки и их внедрение в производство, а не только имитировать уже существующие технологии.

Приведем результаты численных экспериментов, подтверждающих теоретические выводы, полученные ранее (рис. 4, 5).

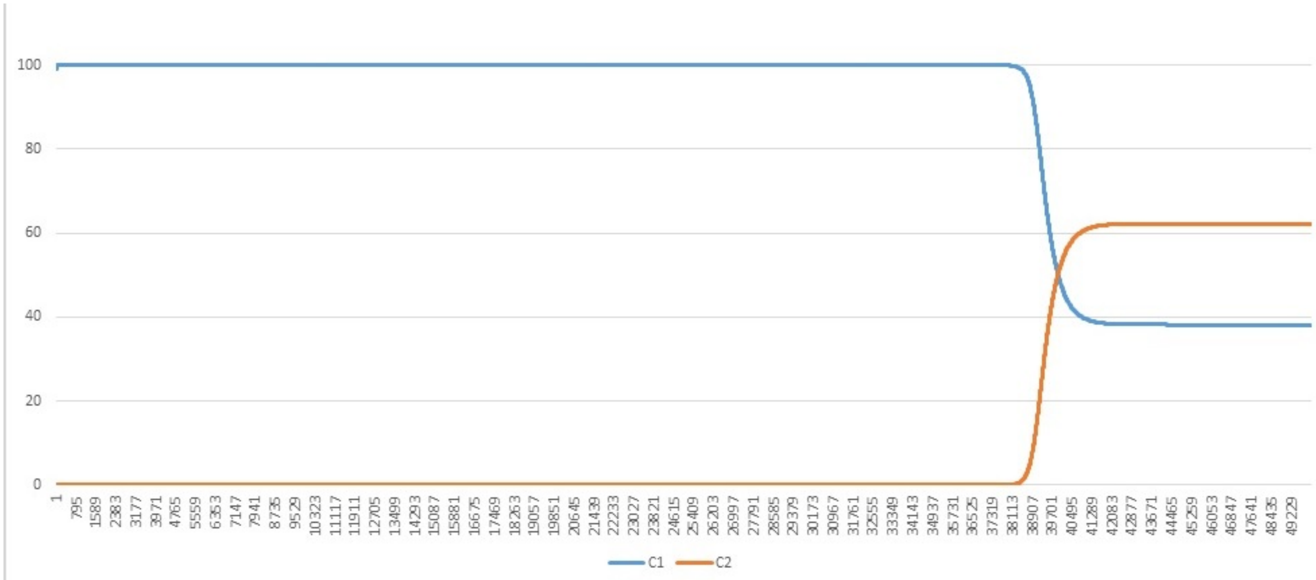

Рис. 4. Отсутствие инноваций

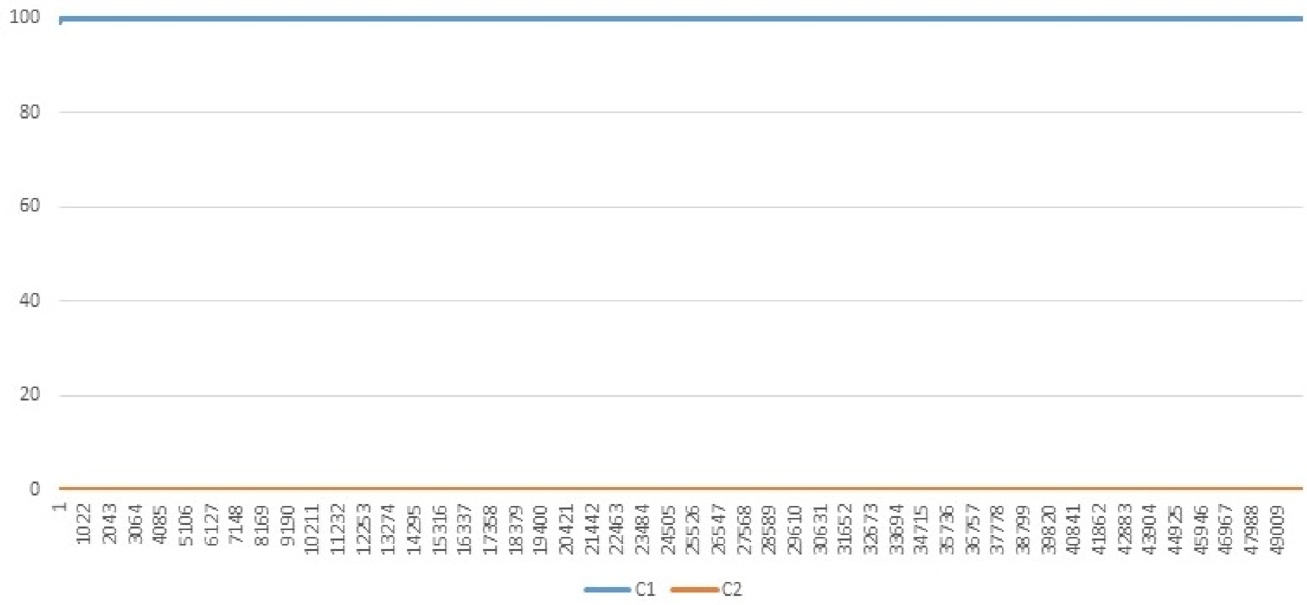

Рис. 5. Отсутствие инноваций

Заключение

В диссертации предложен метод математического моделирования шумпетеровской динамики распределения капитала по уровням эффективности, учитывающие ограниченность экономического роста.

Основными результатами являются обоснование глобальной устойчивости положений равновесия для предложенных динамических систем, а также разработка моделей со структурными изменениями на основе глобальной устойчивости с целью преодоления стагнации.

Предложен численный метод моделирования шумпетеровской динамики распределения капитала на основе разработанных моделей. Разработан комплекс программ, реализующий этот метод. С помощью разработанного комплекса программ можно прогнозировать динамику развития экономической системы.

Список публикаций

В изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Kirillov A.N., Sazonov A.M. Global schumpeterian dynamics with structural variations // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». — 2019. Т. 12, № 3. — С. 17–27. **(WoS, Scopus)**
2. Kirillov A.N., Sazonov A.M. The dynamics of the economic evolution with the capital depreciation // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2020. — №. 2. — pp. 118–130. **(Scopus)**
3. Kirillov A.N., Sazonov A.M. The global stability of the Schumpeterian dynamical system // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2020. — Т. 16, вып. 4. — С. 348–356. **(WoS, Scopus)**
4. Кириллов А.Н., Сазонов А.М. Моделирование процесса биологической очистки сточных вод на основе шумпетеровской динамики // Труды Института системного анализа Российской академии наук. — 2020. — Т. 70, вып. 3. — С. 24–28. **(ВАК)**

В других изданиях:

5. Кириллов А.Н., Сазонов А.М. Глобальная устойчивость в модели нелинейной шумпетеровской динамики // Труды КарНЦ РАН. — 2018. — № 7. — С. 34–40.
6. Кириллов А.Н., Сазонов А.М. Динамика распределения капитала по технологическим уровням // Материалы международной научной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», Минск, 24-29 сентября 2018 г. — Минск: БГУ, 2018. — С. 121–122.
7. Кириллов А.Н., Сазонов А.М. Математические модели динамики распределения капитала отрасли по технологическим уровням // III Международный экономический симпозиум - 2018: Материалы международных научных конференций, Санкт-петербург, 19-21 апреля 2018 г. — Санкт-петербург: СПбГУ, 2018. — С. 199.

8. Сазонов А.М. Математическое моделирование эндогенного экономического развития // Процессы управления и устойчивость. — 2020. — Т. 7(23). № 1. Труды 51-й международной научной конференции. Санкт-петербург, 20-24 апреля 2020 г. — Санкт-петербург: СПбГУ, 2020. — С. 413–418.

Свидетельство о регистрации программы:

9. Сазонов А.М. Программа для ЭВМ «Numerical simulation of the Schumpeterian capital dynamics». — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021660145 от 22.06.2021.