На правах рукописи

ЛИПИЛИНА Людмила Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕМАРКОВСКИХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ НА ОСНОВЕ ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

САМАРА 2021

Работа выполнена на кафедре «Программное обеспечение и управление в технических системах» ФГБОУ ВО «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Научный руководитель:
Тарасов Вениамин Николаевич, доктор технических наук, профессор.

Официальные оппоненты:

Титовцев Антон Сергеевич, доктор технических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет».

Лезин Илья Александрович, кандидат технических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пензенский государственный технологический университет».

Защита диссертации состоится «22» июня 2021 г. в 10-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.217.03 на базе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» по адресу: г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, ауд. №200.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» по адресу: 443100, г. Самара, ул. Первомайская, 18.
Отзывы на автореферат (в двух экземплярах, заверенные печатью) просим направлять по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус, ученому секретарю диссертационного совета Д 212.217.03;
Тел. (846) 337-04-43, e-mail: zoteev-ve@mail.ru

Автореферат разослан «___» __________2021 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 212.217.03

ЗОТЕЕВ Владимир Евгеньевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию немарковских сетей массового обслуживания, широко востребованных при математическом моделировании процессов функционирования различных систем, включая телекоммуникационные и компьютерные сети, транспорт, логистика, сфера обслуживания и т.д. Сети телекоммуникаций уже давно называют сетями массового обслуживания.

Одним из главных подходов к оценке важнейших показателей этих систем является вероятностное моделирование на основе теории массового обслуживания. Такое моделирование подразумевает представление этих систем в виде совокупности ресурсов, т.е. сети массового обслуживания (сети МО). Этому подходу посвящены работы многих отечественных и зарубежных авторов, как Вишневский В.М., Цыбаков Б.С., Степанов С.Н., Алиев Т.И., L. Kleinrock, A.R. Ward, P.W. Glinn и многие другие.

Существующие методы анализа этих систем на основе современной теории массового обслуживания используют в основном модели, основанные на пуассоновских входных потоках. Отличие реального трафика в современных компьютерных и телекоммуникационных сетях от пуассоновских потоков из-за его сильной вариативности, а также многопачечности отмечены в многочисленных работах отечественных и зарубежных исследователей (Цыбаков Б.С., Петров В.В., Шелухин О.И., Осин А.В., Тарасов В.Н., D.Wilson, W.Leland, W.Willinger, Taggu M.S. и многие другие). Кроме того, этот факт послужил появлению теории самоподобного трафика, интервалы в котором описываются тяжелохвостными распределениями.

В этом случае необходимо опираться на общую теорию массового обслуживания, а именно на системы типа G/G/1 для расчета характеристик которой аналитические результаты в конечной форме отсутствуют.

Как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания $\bar{W}$ является основной характеристикой системы массового обслуживания (СМО), остальные характеристики являются производными от $\bar{W}$. Из теории систем G/G/1 следует, что время ожидания связано квадратичной зависимостью с коэффициентами вариаций интервалов поступления c_λ и времени обслуживания c_μ. Поэтому применение известной теории марковских сетей (для которых коэффициенты вариаций интервалов поступления и времени обслуживания равны единице) к исследованию функционирования сетей МО может приводить к большим погрешностям в десятки и сотни процентов.

Поэтому разработка новых моделей массового обслуживания типа G/G/1 для описания потоков и расчета основных ее характеристик на сегодняшний день является актуальной задачей теоретического анализа функционирования сетей МО.

Целью диссертационной работы является разработка и исследование математических моделей узлов функционирования сетей МО при коэффициентах вариаций интервалов поступления и времени обслуживания требований как больших единицы, так и меньших единицы, а также программная реализация этих моделей для экспериментального исследования сетей МО путем расчета их характеристик.

Основные задачи, решение которых необходимо для реализации цели:

1) построение математической модели узла сети МО в виде СМО с гиперэкспоненциальными входными распределениями H_2, обеспечивающих коэффициенты вариаций временных интервалов потока, большие 1 с обоснованием возможности аппроксимации произвольных законов с использованием как двух, так и трех начальных моментов;

2) построение математической модели узла сети МО в виде СМО со сдвинутыми экспоненциальными распределениями M^-, обеспечивающих коэффициенты вариаций временных интервалов потока, меньшие 1;

3) исследование математической модели трафика сети МО в виде уравнений баланса потоков с использованием нескольких первых моментов распределений временных интервалов в потоках;

4) разработка программного обеспечения расчета оценок показателей производительности узлов сети МО на основе уравнений баланса потоков и проведение вычислительных экспериментов для широкого диапазона изменения параметров потоков, подтверждающих приемлемость предложенного подхода.

Объектом исследования являются математические модели и методы для анализа функционирования сети МО.

Предметом исследования являются математические модели и методы для анализа немарковских сетей МО.

Соответствие паспорту научной специальности.

Область исследований соответствует паспорту специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по пунктам: 1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений; 2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

Методы исследования основаны на теории вероятностей, теории массового обслуживания и методе спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, теории случайных процессов, имитационном моделировании, численных методах решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений, в том числе, реализованные в пакете Mathcad для проведения вычислительных экспериментов.

Научная новизна:

1. В качестве математической модели узла сети МО для описания ее функционирования впервые предложена СМО $H_2/H_2/1$ с гиперэкспоненциальными входными распределениями, позволяющая в отличие от классической СМО M/M/1 учитывать коэффициенты вариаций временных интервалов, большие единицы (05.13.18, пункт 1).

2. Впервые предложена новая СМО с запаздыванием во времени $M^- / M^- / 1$ со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями в качестве математической модели узла сети МО для описания его функционирования и

позволяющая в отличие от классической СМО M/M/1 учитывать коэффициенты вариаций временных интервалов, меньшие единицы (05.13.18, пункт 1).

3. Предложена система уравнений баланса потоков с использованием нескольких первых моментов распределений временных интервалов потоков для расчета характеристик немарковской сети МО, в которой в качестве узлов выступают предложенные СМО, позволяющая в отличие от марковской сети учитывать широкий диапазон изменения параметров потоков, а также обеспечивающая относительную погрешность не более 5-6% (05.13.18, пункт 2).

4. Разработано программное обеспечение, с использованием которого проведены экспериментальные исследования сети МО как модели реальной компьютерной сети, результаты которых отличаются от результатов марковских сетей МО (05.13.18, пункт 2).

Практическая ценность работы состоит в следующем:

Использование предложенных моделей массового обслуживания $H_2/H_2/1$ и $M^-/M^-/1$ для оценки показателей производительности узлов сетей МО позволяет учитывать особенности потоков, когда коэффициенты вариаций интервалов между требованиями входящего потока и времени их обслуживания могут быть как меньше, так и больше единицы.

Разработанные методы и модели реализованы в виде программного комплекса «Программный комплекс расчета характеристик систем массового обслуживания типа $H_2/H_2/1$, $H_2/M/1$ и $M/M/1$ с запаздыванием во времени» и позволяют использовать его в проектных организациях, специализирующихся в сетевых технологиях для оптимизации как структуры, так и показателей производительности телекоммуникационных и компьютерных сетей.

Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность полученных результатов исследований обеспечиваются согласованностью результатов вычислительных экспериментов с квадратичной зависимостью среднего времени ожидания от коэффициентов вариаций временных интервалов, что соответствует теории СМО G/G/1, а также совпадением результатов экспериментов в частном случае с данными марковских (экспоненциальных) сетей.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Математическая модель узла сети массового обслуживания в виде СМО $H_2/H_2/1$ с гиперэкспоненциальными входными распределениями второго порядка для случая, когда коэффициенты вариаций временных интервалов в потоках больше единицы;

2. Математическая модель узла сети массового обслуживания в виде СМО $M^-/M^-/1$ с запаздыванием во времени со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями для случая, когда коэффициенты вариаций временных интервалов в потоках меньше единицы;

3. Уравнения баланса потоков сети массового обслуживания для восстановления числовых характеристик распределений временных интервалов в потоках;

4. Результаты экспериментальных исследований с помощью разработанного

программного комплекса по расчету характеристик сети МО для оценки показателей ее функционирования.

Реализация и внедрение. Компоненты программного обеспечения официально зарегистрированы свидетельством о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016612657 «Программный комплекс расчета характеристик систем массового обслуживания типа $H_2/H_2/1$, $H_2/M/1$ и $M/M/1$ с запаздыванием во времени». Результаты диссертационной работы внедрены и использованы в проектной деятельности компании «ИнтерСвязьСервис» при модернизации сетей последней мили абонентов FTTb, что позволило сократить затраты на проектирование подключений абонентских узлов Интернет. Результаты работы также внедрены в учебном процессе дисциплины «Проектирование и моделирование сетей связи» при подготовке магистров по направлениям подготовки 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника» и 27.04.04 «Управление в технических системах».

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы обсуждались в форме докладов на следующих конференциях: Материалы XXII Всероссийской научной конференции ППС, НС и аспирантов ПГУТИ (Самара, 2015, 2016, 2017), Международная НТК «Перспективные информационные технологии» СНЦ РАН (Самара, 2017), Всероссийской научной конференции Росинфоком-2017 «Актуальные вопросы телекоммуникаций» (Самара, 2017), XIV международная НТК «Новые информационные технологии и системы НИТиС-2017» (Пенза, 2017), 4th International Scientific and Practical Conference «Problems of Infocommunications. Science and Technology» (Харьков, Украина, 2017), IX Всероссийская конференция с международным участием «Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии» (Оренбург, 2019), IV Международная НПК «Вопросы науки и практики 2019» (Москва, 2019).

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликовано 20 работ, из них 7 в изданиях из перечня ВАК, 1 в изданиях Scopus и Web of Science.

Личный вклад автора. Работы [7,9,13,15,19] выполнены полностью самостоятельно, в [12] автору принадлежит совместная разработка алгоритмов и их программная реализация с проведением численных экспериментов, в остальных – совместная разработка математических моделей и самостоятельное проведение численных экспериментов.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, библиографического списка и приложения. Объем работы: 135 страницы основного текста, 42 рисунка и 18 таблиц, приложение на 3 страницах.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обоснование актуальности темы исследования, ставится цель и соответствующие задачи для ее достижения; определяются новизна и практическая значимость результатов исследования.

В первой главе описана востребованность СМО и сетей МО при моделировании процессов функционирования телекоммуникационных и компьютерных сетей, транспорта, сферы обслуживания населения и др. Как пример отмечена особенность трафика в современных сетях, который можно рассматривать как неоднородный и отличающийся от пуассоновского потока в силу его сильной вариативности и использования в нем разнообразных сетевых приложений.

Проведен анализ литературных источников по теме научного исследования. Приводится обзор и сравнение методов моделирования различных систем на основе теории массового обслуживания. Отмечено, что механизм очередей используется в телекоммуникационных и компьютерных сетях, транспорте, сфере обслуживания населения и др. Как пример отмечен, что механизм очередей задействован в любом сетевом устройстве, где применяется коммутация пакетов — маршрутизаторе, коммутаторе локальной или глобальной сети, оконечном узле.

Делается вывод о том, что теория массового обслуживания ограничивается аналитическими результатами для систем массового обслуживания (СМО) M/M/1, M/G/1 и др., предполагающими пуассоновские входные потоки, как и в марковских сетях МО. Однако современный телетрафик не может быть корректно описан этими классическими моделями теории массового обслуживания.

Таким образом, определение вероятностно-временных характеристик функционирования сети МО представляет собой актуальную задачу. В связи с этим обосновывается необходимость создания математического и программного инструментария для решения проблемы анализа сетей МО.

Вторая глава посвящена математическим моделям узла сети массового обслуживания в случае, когда коэффициенты вариаций временных интервалов поступления c_λ и времени обслуживания c_μ больше или равны 1.

Вначале рассмотрим систему $H_2/H_2/1$, которая описывается гиперэкспоненциальными входными распределениями 2-го порядка с функциями плотностей:

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \tag{1}$$

$$b(t) = q\mu_1 e^{-\mu_1 t} + (1-q)\mu_2 e^{-\mu_2 t}, \tag{2}$$

обеспечивающими коэффициенты вариаций c_λ и c_μ большие 1.

Преобразование Лапласа функции (1) имеет вид $A^*(s) = p\dfrac{\lambda_1}{s+\lambda_1} + (1-p)\dfrac{\lambda_2}{s+\lambda_2}$, а функции (2) $B^*(s) = q\dfrac{\mu_1}{s+\mu_1} + (1-q)\dfrac{\mu_2}{s+\mu_2}$. Функции (1) и (2) содержат по 3 неизвестных параметра и позволяют аппроксимировать законы распределения с использованием 3-х первых начальных моментов в случае $c_\lambda \geq 1, c_\mu \geq 1$. Распределение H_2 обладает уникальным свойством, его возможно описать как с помощью 2-х первых моментов, так и с помощью 3-х моментов. Суть метода спектрального разложения интегрального уравнения Линдли состоит в том, что требуется найти разложение $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1$ в виде отношения двух рациональных функций $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ и определить нули и полюса этого разложения. Для СМО $H_2/H_2/1$ это выражение примет вид $\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\left[p\frac{\lambda_1}{\lambda_1-s}+(1-p)\frac{\lambda_2}{\lambda_2-s}\right]\cdot\left[q\frac{\mu_1}{s+\mu_1}+(1-q)\frac{\mu_2}{s+\mu_2}\right]-1$. Опуская математические выкладки, выполненные с помощью символьных операций Mathcad, получим

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=-\frac{s\left(s^3-c_2s^2-c_1s-c_0\right)}{(\lambda_1-s)(\lambda_2-s)(\mu_1+s)(\mu_2+s)}. \qquad (3)$$

Для окончательного разложения числителя на простые множители, остается определить корни многочлена $s^3-c_2s^2-c_1s-c_0$. При этом по правилам метода спектрального разложения, необходимо наличие двух действительных отрицательных корней $-s_1$ и $-s_2$ или же двух комплексно сопряженных с отрицательными вещественными частями и одного положительного корня s_3 у этого многочлена. Наличие таких корней следует из существования и единственности разложения (3) в случае стабильной системы, когда коэффициент загрузки системы $\rho=\bar{\tau}_\mu/\bar{\tau}_\lambda<1$. Многочисленные численные эксперименты подтвердили наличие только двух действительных отрицательных корней и одного положительного корня.

Окончательное спектральное разложение будет иметь вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=-\frac{s(s+s_1)(s+s_2)(s-s_3)}{(\lambda_1-s)(\lambda_2-s)(\mu_1+s)(\mu_2+s)}. \qquad (4)$$

Тогда метод спектрального разложения позволяет определить преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания $W^*(s)$: $W^*(s)=\frac{s_1s_2(s+\mu_1)(s+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(s+s_1)(s+s_2)}$. Среднее время ожидания для СМО $H_2/H_2/1$ равно значению производной от преобразования Лапласа функции плотности со знаком минус в точке $s=0$.

$$\bar{W}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}. \qquad (5)$$

При аппроксимации потоков с использованием 2-х первых начальных моментов распределений временных интервалов, для нахождения параметров распределений (1) и (2) методом моментов решается система 2-х уравнений

$$p/\lambda_1+(1-p)/\lambda_2=\bar{\tau}_\lambda,\ 2p/\lambda_1^2+2(1-p)/\lambda_2^2=\overline{\tau_\lambda^2}. \qquad (6)$$

Решение системы (6) имеет вид:

$$\lambda_1=2p/\bar{\tau}_\lambda,\ \lambda_2=2(1-p)/\bar{\tau}_\lambda,\ p=[1\pm\sqrt{(c_\lambda^2-1)/(c_\lambda^2+1)}]/2. \qquad (7)$$

Аналогично находим параметры распределения (2):

$$\mu_1=2q/\bar{\tau}_\mu,\ \mu_2=2(1-q)/\bar{\tau}_\mu,\ q=[1\pm\sqrt{(c_\mu^2-1)/(c_\mu^2+1)}]/2. \qquad (8)$$

Полученные решения (7) и (8) перекрывают диапазон изменения коэффициента вариации c_λ от 1 до ∞, за значения параметров p и q можно выбрать любые из них. При аппроксимации потоков с использованием 3-х первых моментов распределений временных интервалов, к системе (6) добавляется 3-е уравнение для 3-го начального момента распределения H_2:

Для существования и единственности решения системы 3-х нелинейных уравнений для входного потока необходимо и достаточно выполнение условия: $\overline{\tau_\lambda^3} \cdot \bar{\tau}_\lambda \geq 1{,}5 \cdot \overline{\tau_\lambda^2}$. Аналогичное условие ставится и для времени обслуживания. Среднее время ожидания $\bar{W}$, определенное как с использованием 2-х первых моментов, так и с использованием 3-х моментов, показывает, что результаты в первом случае несколько занижаются.

Третья глава посвящена математической модели узла сети МО в случае, когда коэффициенты вариаций временных интервалов: интервалов поступления c_λ и времени обслуживания c_μ меньше 1. В качестве одной математической модели таких систем предлагается ниже рассматриваемая система массового обслуживания с запаздыванием.

Рассмотрим СМО, образованную двумя потоками с функциями плотности:

$$a(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & t \geq t_0 \\ 0, & 0 \leq t < t_0 \end{cases}, \; b(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu(t-t_0)}, & t \geq t_0 \\ 0, & 0 \leq t < t_0 \end{cases}. \qquad (9)$$

Функции плотности (9) являются сдвинутыми вправо от нулевой точки на величину t_0 экспоненциальными распределениями с двумя параметрами (λ, t_0) и (μ, t_0), причем $\lambda<\mu$. Таким образом, имеем немарковскую СМО с запаздыванием во времени на величину $t_0 > 0$.

Заметим, что законы распределения (9) содержит два параметра, следовательно, они могут быть описаны двумя первыми моментами и аппроксимировать произвольные распределения с использованием 2-х первых моментов в случае $c_\lambda < 1, c_\mu < 1$. Новую СМО, в отличие от классической, обозначим $\mathrm{M}^- / \mathrm{M}^- / 1$ и она не будет марковской, т.к. $c_\lambda < 1, c_\mu < 1$. С помощью метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли найдено преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания

$$W^*(s) = s\Phi_+(s) = \frac{(1-\lambda/\mu)(\mu+s)}{(s+\mu-\lambda)}. \qquad (10)$$

Из преобразования Лапласа (10) найдем среднее время ожидания через значение первой производной $W^*(s)$ со знаком минус при s=0:

$$\bar{W} = \frac{\lambda/\mu}{\mu-\lambda}. \qquad (11)$$

Числовые характеристики распределений (9) – средние значения $\bar{\tau}_\lambda$, $\bar{\tau}_\mu$ и коэффициенты вариаций c_λ, c_μ будут равны:

$$\bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0, \; \bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0, c_\lambda = (1+\lambda t_0)^{-1}, \; c_\mu = (1+\mu t_0)^{-1}. \qquad (12)$$

Тогда неизвестные параметры распределений (9) λ и μ в зависимости от параметра сдвига t_0 можем определить из (12) известным методом моментов.

Числовые характеристики $\bar{\tau}_\lambda$, $\bar{\tau}_\mu$, c_λ, c_μ и параметр сдвига t_0 будут входными параметрами при расчете характеристик системы $M^-/M^-/1$.

Из выражений (12) следует, что коэффициенты вариаций c_λ и c_μ будут меньше 1 и их значения будут регулироваться параметром сдвига t_0. Таким образом, операция сдвига в законах распределений трансформирует классическую марковскую СМО М/М/1 в не марковскую систему $M^-/M^-/1$ с меньшими коэффициентами вариаций, следовательно, с меньшим временем ожидания.

В третьей главе, после рассмотрения математических моделей узлов сети МО, дается описание разработанного программного обеспечения расчета характеристик выше рассмотренных СМО. Алгоритмизация приведенных в работе методов расчета характеристик трех систем позволила получить эти характеристики для широкого диапазона изменения их параметров. В программе реализованы численные методы решения систем нелинейных уравнений 3-го порядка методом Ньютона с учетом выше приведенных условий их разрешимости и нахождения отрицательных корней кубических уравнений методом Виета-Кардано. При полном тестировании программы использованы вычисления в Mathcad.

Четвертая глава посвящена исследованию математической модели потоков сети массового обслуживания на основе уравнений баланса потоков.

Пусть имеется открытая сеть МО с матрицей вероятностей передач $\mathbf{P}=\{p_{ij}\}$, $(i, j=1,\ldots,n)$, где p_{ij} – вероятность того, что требование, покидающее узел S_i, поступит в узел S_j. Узел сети массового обслуживания представляет собой систему $H_2/H_2/1$ или $M^-/M^-/1$.

Решением системы уравнений равновесия потоков относительно интенсивностей λ_i на входе и выходе каждой СМО сети МО в установившемся режиме определяем средние значения интервалов времен между соседними требованиями $\bar{\tau}_i = \lambda_i^{-1}$ для каждого потока в сети:

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{j=1}^{n} p_{ji}\lambda_j, (i = 1,...,n), \qquad (13)$$

где λ_{0i} - интенсивность внешнего потока в i-й узел.

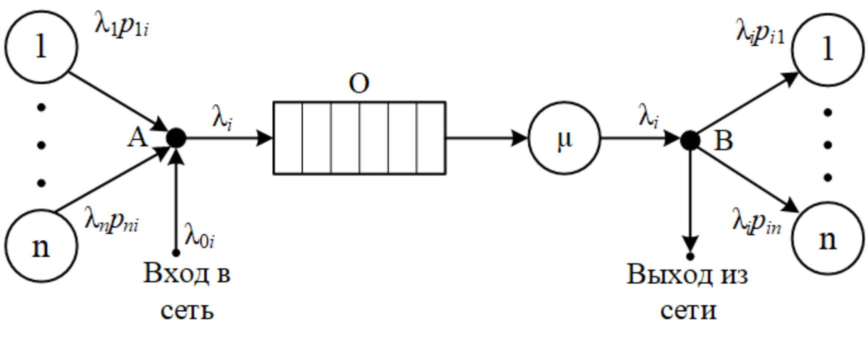

Рис. 1. Структура i - й СМО сети МО

Система (13) – это уравнения баланса потоков на уровне средних значений интервалов поступления требований в сеть МО с учетом $\overline{\tau}_i = \lambda_i^{-1}$, позволяющие декомпозировать сеть МО на отдельные узлы. Уравнений (13) достаточно для декомпозиции и дальнейшего расчета марковской сети, но недостаточно – для немарковской сети.

Для повышения точности расчетов немарковских сетей массового обслуживания требуются уравнения баланса потоков на уровне моментов 2-го порядка распределения интервалов поступления требований. Это связано с не пуассоновским характером потоков, циркулирующих в сети массового обслуживания. Вывод уравнений баланса сопряжен со многими проблемами и рассмотрим некоторые из них.

Из уравнений (13) и из рис.1 следует, что на входе *i*-го узла сети МО агрегируются (мультиплексируются) (знак Σ) разреженные исходящие потоки ($p_{ji}\lambda_j$) от других узлов. Таким образом, для вывода уравнений баланса на уровне моментов 2-го или 3-го порядка, нужны будут: 1) математические модели агрегирования и вероятностного просеивания потоков на уровне необходимого числа моментов случайного интервала между требованиями; 2) математическая модель исходящего потока на уровне необходимого числа моментов интервалов между требованиями входящего потока, а также времени обслуживания в узле.

Для каждого узла сети задаются числовые характеристики случайного времени обслуживания: ($\overline{\tau}_{\mu i}, \overline{\tau^2_{\mu i}}$) – два или три первых начальных момента времени обслуживания в зависимости от рассмотренных выше случаев. Для внешнего потока задается совокупность таких же моментов ($\overline{\tau}_{0i}, \overline{\tau^2_{0i}}$) времени между соседними требованиями потока, входящего в узел S_i.

Далее воспользуемся результатами работы «Бахарева Н.Ф., Тарасов В.Н. Аппроксимативные методы и модели массового обслуживания. Исследование компьютерных сетей / Изд-во СНЦ РАН, 2011, 327 с.»

Математическое агрегирование двух потоков. Функция распределения интервала времени τ_Σ агрегированного потока при сложении двух потоков с интенсивностями $\lambda_1 = \overline{\tau}_1^{-1}$ и $\lambda_2 = \overline{\tau}_2^{-1}$ (рис.2) определяется следующим интегральным соотношением:

$$F_{\tau_\Sigma}(t) = 1 - \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\{[1 - F_{\tau_1}(t)]\int_t^\infty [1 - F_{\tau_2}(u)]du + [1 - F_{\tau_2}(t)]\int_t^\infty [1 - F_{\tau_1}(u)]du\}. \quad (14)$$

Отсюда начальные моменты интервала времени τ_R в агрегированном потоке событий при сложении двух независимых потоков с интенсивностями $\lambda_1 = \overline{\tau}_1^{-1}$ и $\lambda_2 = \overline{\tau}_2^{-1}$ с функциями распределения вероятностей (ФРВ) $F_{\tau_1}(t)$ и $F_{\tau_2}(t)$ могут быть найдены следующим образом:

$$\overline{\tau}_R = 1/\lambda_\Sigma, \ \overline{\tau^2_{\mathrm{R}}} = 2\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_\Sigma}\int_0^\infty g_1(t)\cdot g_2(t)dt, \ \overline{\tau^3_{\mathrm{R}}} = 6\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_\Sigma}\int_0^\infty t\cdot g_1(t)\cdot g_2(t)dt, \quad (15)$$

где функции $g_j(t) = \int_t^\infty [1 - F_{\tau_j}(u)]\,du$, а значение $\lambda_\Sigma = \lambda_1 + \lambda_2$.

Для практического применения выражений (15) исходные неизвестные ФРВ $F_{\tau_j}(t)$ интервалов, должны аппроксимироваться функцией сдвинутого экспоненциального распределения M^- в случае, когда коэффициенты вариаций составляющих $c_{\lambda j} < 1$ (j=1, 2):

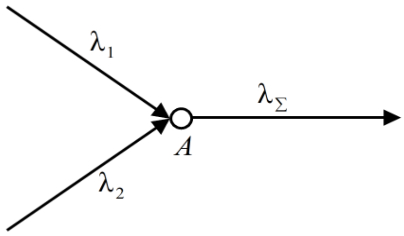

Рис. 2. Агрегирование двух потоков

$$F_j(t) = \begin{cases} 0, \ t \le \tau_{j1} \\ 1\text{-}\exp\{\text{-}(t-\tau_{j1})/\tau_{j2}\}, \ t \ge \tau_{j1} \end{cases}. \quad (16)$$

Здесь параметр τ_{j1} соответствует параметру сдвига t_0 в СМО $M^-/M^-/1$, а $\tau_{j2} = \lambda_{j2}^{-1}$. В случае $c_{\lambda j} \ge 1$ исходные функции распределений аппроксимируются гиперэкспоненциальным распределением 2-го порядка H_2:

$$F_j(t) = 1 - p_j \exp(-t/\tau_{j1}^*) - (1-p_j)\exp(-t/\tau_{j2}^*). \quad (17)$$

В функции (17) параметры $\tau_{j1}^* = \lambda_{j1}^{-1}$, $\tau_{j2}^* = \lambda_{j2}^{-1}$. В смешанном случае, одна функция аппроксимируется (16), а другая – (17). Тогда задача определения начальных моментов случайного интервала между событиями в результирующем потоке по выражениям (15) сводится к вычислению табличных интегралов. При аппроксимации потоков с использованием 2-х первых моментов получаем следующие значения неизвестных параметров (16) и (17):

$$\tau_{j1} = \overline{\tau}_j - \sqrt{\overline{\tau_j^2} - \overline{\tau}_j^2}\,;\ \tau_{j1} = \sqrt{\overline{\tau_j^2} - \overline{\tau}_j^2}\,;\ \tau_{j1}^* = \overline{\tau}_j/(2p_j)\,;\ \tau_{j2}^* = \overline{\tau}_j/[2(1-p_j)];$$

$$p_j = 1/2 \pm \sqrt{1 - 2\cdot\overline{\tau}_j^2/\overline{\tau_j^2})}\,;\ (j=1,\ 2). \quad (18)$$

Вероятностное разрежение потока. При вероятностном просеивании потока со средним значением $\overline{\tau}$ и дисперсией D_τ времени между событиями (точка B на рис. 2), в которой требования с вероятностью $p \ne 0$ уходят из потока (просеянный поток 2) среднее значение и дисперсия времени между соседними событиями в разреженном потоке 2 равны:

$$\overline{\tau}_p = \overline{\tau}/p,\ D_{\tau_p} = D_\tau/p + \overline{\tau}^2 q/p^2, \quad (19)$$

где $q = 1-p$. После определения математических операций агрегирования и просеивания потоков, по аналогии с уравнениями равновесия потоков с использованием средних значений интервалов (14), можно записать уравнения равновесия относительно их дисперсий.

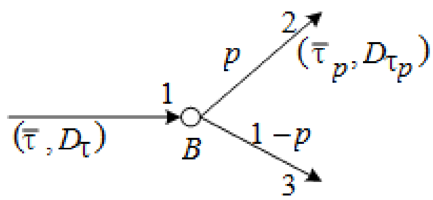

Рис. 3. Вероятностное разрежение потока

Дисперсии времен между событиями этих потоков, полученные по формуле (19) равны:

$$D_{\Pi\, ji} = \frac{1}{p_{ji}}\left(D_{\text{исх}\, j} + \frac{1-p_{ji}}{p_{ji}\cdot\lambda_j^2}\right),\ (i, j=1,2,\ldots,n). \quad (20)$$

Тогда уравнения равновесия потоков на уровне дисперсий времен между событиями на входе и выходе i-го узла сетевой модели можно записать в виде уравнений:

$$D_{\text{вх}\,i} = D(\Pi_{0i} * (\Pi_{1\text{исх},i} * \ldots * (\Pi_{n-1\text{исх},i} * \Pi_{n\,\text{исх},i}))). \qquad (21)$$

Выражение $D(\Pi_{j-1\text{исх},i} * \Pi_{j\,\text{исх}\,i})$ означает операцию вычисления дисперсии попарно агрегируемых по формулам (15) исходящих потоков от (j-1)-го ($\Pi_{j\text{-1},i}$) и j-го узлов (Π_{ji}), поступающих на вход i-го узла.

Определение характеристик исходящего потока. Числовые характеристики исходящего потока из СМО: среднее значение и дисперсия интервала могут быть определены по следующим выражениям

$$\overline{\tau}_{\text{исх}} = \overline{\tau}_{\mu} + p_0'\,\overline{\tau}_{\lambda}', \;\; D_{\text{исх}} = D_{\mu} + p_0' D_{\lambda}' + p_0'(1 - p_0')(\overline{\tau}_{\lambda}')^2, \qquad (22)$$

где p_0' - вероятность того, что обслуженное требование оставляет СМО пустой, $\overline{\tau}_{\lambda}'$ и D_{λ}' - среднее значение и дисперсия остаточного времени τ_{λ}', в течение которого СМО ожидает поступления непосредственно следующего требования, т.е. времени простоя СМО. При необходимости числовые характеристики выходного потока также можно определить включительно до 3-го момента.

Решение уравнений (13) и (21) совместно с выражениями для дисперсий исходящих потоков (22) является основой метода баланса потоков, позволяющего декомпозировать сети МО на уровне двух первых моментов распределений вероятностей. В стационарном случае, система уравнений (13) имеет единственное решение, т.к. ее определитель не равен нулю. Система (21) совместно с (22) решается методом итераций. При решении многих задач из области сетевых технологий, в матрице вероятностей передач $\mathbf{P}=\{p_{ij}\}(i,j=1,\ldots,n)$, элементы p_{ij} принимают значения в основном 0 и 1. В связи с этим, системы уравнений (13) и (21) становятся хорошо обусловленными и для достижения 3% относительной погрешности решения достаточно 3-4-х итераций.

В главе также приведены примеры расчетов сетей МО при различных значениях коэффициентов вариаций интервалов входного потока и времени обслуживания, подтверждающие адекватность и применимость предложенного подхода. При расчете характеристик таких сетевых моделей кроме характеристик узлов, важно знать и характеристики сети в целом. Для их определения вычисляют т.н. коэффициенты передачи требований через известные значения интенсивностей потоков к i-у узлу сети λ_i и потока требований из независимого пуассоновского источника с интенсивностью $\gamma = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i$ требований в секунду $\alpha_i=\lambda_i/\gamma$. Тогда характеристики сети в целом определяться известными формулами теории вычислительных систем.

Пятая глава посвящена оценке адекватности разработанных моделей расчета сетей массового обслуживания применительно к реальным локальным вычислительным сетям. Расчеты для случая марковской сети массового обслуживания в сравнении с результатами имитационного моделирования в академической версии программной системы Riverbed Modeler Academic Edition показали полное совпадение результатов без учета широковещательного трафика в реальной сети. При этом адекватность самой имитационной модели полностью подтверждена выполнением баланса потоков сети, что в теории означает выполнение уравнений равновесия потоков. В работе была рассмотрена локальная вычислительная сеть как сегмент любой корпоративной сети: это может быть сегмент сети предприятия, организации, ВУЗа и т.п.

Результаты расчетов полностью подтверждаются известной формулой теории массового обслуживания для среднего времени ожидания о квадратичной зависимости среднего времени ожидания от коэффициентов вариаций временных интервалов. Тем самым, результаты работы подтверждают практическую применимость предложенных моделей к анализу реальных компьютерных сетей.

В заключении обобщены основные теоретические и практические результаты диссертационной работы.

В приложениях приведены свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, акты о внедрении и использовании результатов диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В диссертации решена новая научно-техническая задача, заключающаяся в разработке и исследовании математического и программного инструментария для анализа функционирования немарковских сетей массового обслуживания.

Основные результаты состоят в следующем:

1. Разработана и предложена математическая модель узла сети МО в виде СМО $H_2/H_2/1$ с гиперэкспоненциальными входными распределениями, которая позволяет рассчитать ее характеристики в случае, когда коэффициенты вариаций временных интервалов потоков больше либо равны единице. Обоснована возможность аппроксимации произвольных законов распределений гиперэкспоненциальным в этом случае с использованием как двух, так и трех начальных моментов.

2. Разработана и предложена математическая модель узла сети МО в виде СМО $M^{-}/M^{-}/1$ с запаздыванием во времени со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями, которая позволяет рассчитать ее характеристики в случае, когда коэффициенты вариаций временных интервалов трафика меньше единицы. Обоснована возможность аппроксимации произвольных законов распределений в этом случае с использованием двух начальных моментов.

3. Предложены уравнения баланса потоков сети МО как модели компьютерной сети для восстановления числовых характеристик распределений временных интервалов в потоках для последующего применения предложенных СМО для расчета их характеристик как показателей производительности сетей МО.

4. Разработан программный комплекс расчета характеристик узлов немарковской сети массового обслуживания в виде СМО $H_2/H_2/1$, $H_2/M/1$ и $M^{-}/M^{-}/1$, который совместно с уравнениями баланса потоков позволяет определить показатели производительности сетей МО. В условиях неполной

информации о законах распределений временных интервалов потоков, предложенный подход к теоретическому анализу и экспериментальному исследованию сетей МО является приемлемым с инженерной точностью.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Липилина, Л.В. Исследование задержки в системе G/G/1 / В.Н. Тарасов, Л.В. Липилина, И.В. Карташевский // Инфокоммуникационные технологии. – 2015. - №2. – С.153-158.
2. Липилина, Л.В. Математическая модель телетрафика на основе системы G/M/1 и результаты вычислительных экспериментов / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Информационные технологии. – 2016. - №2. - С.121-126.
3. Липилина, Л.В. Модели массового обслуживания для исследования телетрафика в случае широкого диапазона изменения его параметров / В.Н. Тарасов, И.В. Карташевский, Л.В. Липилина // Системы управления и информационные технологии. -2016. -№3. -С.24-27.
4. Липилина, Л.В. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Информационные технологии. – 2016. - №12. - С.952-957.
5. Липилина, Л.В. Оптимизация расчета характеристик системы H_2/M/1 / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, И.В. Карташевский, Л.В. Липилина // Инфокоммуникационные технологии. - 2017. - №4. - С.353-357.
6. Липилина, Л.В. Анализ немарковских сетей массового обслуживания на основе уравнений баланса потоков / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Информационные технологии. – 2018. - №5. - С.306-312.
7. Липилина, Л.В. Метод спектрального разложения интегрального уравнения Линдли и связанные с ним численные методы / Л.В. Липилина // T-Comm Телекоммуникации и транспорт. – 2020. – №.1. – С.49-55.

Публикации в изданиях, индексируемых в международных базах данных, из них

8. Lipilina, L. Comparison of Different Approaches to Determining the Mean Delay Time in a Queuing System H_2/M/1 /V. Tarasov, N. Bakhareva, I. Kartashevskiy, L. Lipilina // 4th International Scientific and Practical Conference «Problems of Infocommunications. Science and Technology» 2017. Pp.311-314. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2017.8246404

Публикации в других изданиях

9. Липилина, Л.В. Анализ потоковых моделей трафика с непуассоновским входным потоком в компьютерных сетях / Л.В. Липилина // Международный журнал «Путь науки». – 2015. - №4. - С.13-14.
10. Липилина, Л.В. Модели массового обслуживания для сетей телекоммуникаций / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Материалы XXII Российской научн.конф. ППС, НС и аспирантов. ПГУТИ, Самара, 2015 г. С.178.
11. Липилина, Л.В. Анализ трафика сетей телекоммуникаций / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Материалы XXII Российской научн.конф. ППС, НС и аспирантов. ПГУТИ, Самара, 2015 г. С.179.
12. Липилина, Л.В. Программный комплекс расчета характеристик СМО типа $H_2/H_2/1$, H_2/M/1 и M/M/1 с запаздыванием во времени / В.Н. Тарасов, Л.В. Липилина // Материалы XXIII Российской научн.конф. ППС, НС и аспирантов. ПГУТИ, Самара,

2016 г. С.257.
13. Липилина, Л.В. Моделирование современного телетрафика на основе систем массового обслуживания / Л.В. Липилина // XVII междунар. НТК «Проблемы техники и технологий телекоммуникаций», Самара, ПГУТИ 22-24 ноября 2016 г. С.445-446.
14. Липилина, Л.В. Анализ моделей телетрафика на основе системы массового обслуживания $H_2/H_2/1$ / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Материалы XXIV Российской научн.конф. ППС, НС и аспирантов. ПГУТИ, г. Самара, 2017 г. С.253.
15. Липилина, Л.В. Исследование моделей телетрафика на основе систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями / Л.В. Липилина // Международная НТК Сборник научных трудов «Перспективные информационные технологии» 14 – 16 марта 2017 г. Самара, СГАУ, СНЦ РАН. С.942-945.
16. Липилина, Л.В. Исследование телетрафика в случае широкого диапазона изменения его параметров на основе теории массового обслуживания / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Материалы конференции Росинфоком-2017 «Актуальные вопросы телекоммуникаций» 01.09.2017 ПГУТИ С.150-152.
17. Липилина, Л.В. Моделирование телетрафика в случае широкого диапазона изменения его параметров на основе теории массового обслуживания / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Сб. науч. ст. XIV междунар. НТК Новые информационные технологии и системы НИТиС-2017 Пенза 22-23 ноября 2017 г. С. 88-91.
18. Липилина, Л.В. Моделирование телетрафика на основе систем массового обслуживания / В.Н. Тарасов, Л.В. Липилина // IX Всероссийская конференция с международным участием «Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии» Оренбург 14‑15 ноября 2019 г. С.495-499.
19. Липилина Л.В. Модели функционирования узлов компьютерной сети на основе систем массового обслуживания // Вопросы науки и практики – 2019: 4 сессия: Сборник статей IV Международной научно-практической конференции, Россия, Москва, 19 октября 2019 г. [Электронный ресурс] / Под ред. проф. Р.А. Исламшина. – Электрон. текст. дан. (1 файл 2,3 Мб). – М.: РусАльянс Сова, 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-5-6040972-8-1. – Загл. с этикетки диска. – с. 37-42.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

20. Липилина, Л.В. Программный комплекс расчета характеристик систем массового обслуживания типа $H_2/H_2/1$, $H_2/M/1$ и $M/M/1$ с запаздыванием во времени / В.Н. Тарасов, Л.В. Липилина // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016612657, Роспатент, М., 03.03.2016.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования "Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики" 443010, г. Самара, ул. Льва Толстого 23

Подписано в печать 16.04.2021 г. Формат 60 x 84/16 Бумага офсетная №1.
Гарнитура Таймс. Заказ 1017352 Печать оперативная. Усл. печ. л. 1.0. Тираж 100 экз.

Отпечатано в издательстве учебной и научной литературы
Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики
443090, г. Самара, Московское шоссе 77, т. (846) 228-00-44

Автореферат отпечатан с разрешения диссертационного совета Д 212.217.03 ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический» университет
(протокол № 3 от «15» апреля 2021 г.)