На правах рукописи

Данилова Инна Владимировна

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССОВ ОПТИМАЛЬНОГО ФУРАЖИРОВАНИЯ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Петрозаводск – 2020

Работа выполнена в Институте прикладных математических исследований – обособленном подразделении Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального исследовательского центра «Карельский научный центр Российской академии наук».

Научный руководитель: **Кириллов Александр Николаевич**
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Буре Владимир Мансурович,**
доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», профессор кафедры математической теории игр и статистических решений

Провоторов Вячеслав Васильевич,
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»

Защита состоится 25 декабря 2020 г. в 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.190.03 при ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет» по адресу: 185910, Республика Карелия, г. Петрозаводск, пр. Ленина, д. 33.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет» и на сайте petrsu.ru.

Автореферат разослан «____» ____________ 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Р. В. Воронов

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Естественные механизмы, существующие в природе, мотивируют популяцию живых организмов или отдельную особь к стремлению максимизировать потребление энергетических ресурсов. Эта идея лежит в основе исследования Р. Макартура (R. MacArthur) и Э. Пианка (E. Pianka)[1], которые являются основоположниками классической теории оптимального фуражирования. Среди задач теории оптимального фуражирования, рассматриваемых в настоящей работе, можно выделить следующие:
1. Выбор популяцией оптимального, в смысле потребления энергии, участка (patch), который в дальнейшем для простоты будет называться ареалом.
2. Определение оптимального времени нахождения популяции в ареале или определение условий при которых популяция покинет ареал.

С целью предсказания выбора популяцией среды обитания, S. D. Fretwell и H. L. Lukas[2] разработали теорию идеального свободного распределения (Ideal free distribution, IFD). Однако, эта концепция оказалась недостаточно хороша, поскольку не учитывала такие факторы как: неполная информированность популяции о качестве ареала, затраты на перемещение к нему, наличие конкуренции за ресурсы питания, и кроме того, в реальности, популяция может выбрать ареал худшего качества. В последствии, в качестве альтернативы идеальному свободному распределению было предложено распределение Больцмана, учитывающее все вышеперечисленные факторы [3]. Популяция, находясь на некотором расстоянии от рассматриваемого ареала имеет некоторую информацию о его качестве. Полнота информации зависит от величины этого расстояния. Чем

[1] MacArthur R. H., Pianka E. R. On the optimal use of a patchy environment // American Naturalist. – 1996.– Vol. 100.– P. 603–609.

[2] Fretwell S. D., Lucas H. L. On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds // Acta Biotheoretica.–1970.– Vol 19.– P.16–36.

[3] Shuichi M., Arlinghaus R., Dieckmann U. Foraging on spatially distributed resources with suboptimal movement, imperfect information, and travelling costs: departures from the ideal free distribution // Oikos.–2010.– Vol. 119.–P. 1469–1483.

ближе популяция к ареалу, тем большей информацией о нем она владеет. При этом, предполагалось, что популяция статична.

В настоящей работе используется подход с учетом распределения Больцмана для решения задачи выбора популяцией оптимального ареала, но при этом, предполагается, что популяция перемещается среди ареалов. Таким образом, возникает задача определения вероятности выбора популяцией ареала в некоторый момент времени t. При этом, ключевым является вопрос об устойчивости распределения Больцмана. Для исследования этого вопроса предлагается динамическая система, описывающая скорость изменения выбора популяцией ареала с течением времени. Распределение Больцмана является частным решением предложенной системы. Устойчивость распределения Больцмана гарантирует возможность его применения в прикладных задачах.

В 1976 году был опубликован ключевой результат исследования второй задачи: Э. Чарнов (E.Charnov)[4] определил оптимальное время нахождения популяции в ареале с учетом скорости потребления энергетических ресурсов. При этом, как и в случае с идеальным свободным распределением, полученный результат не отразил в полной мере процесс, действующий в природе, поскольку на сохранение биологического вида на некоторой территории влияют и другие факторы. Таким образом возникает необходимость исследования задачи влияния некоторого комплекса естественных факторов на оптимальное поведение популяции в рассматриваемом ареале. В настоящей работе в качестве влияющих факторов рассматриваются внутривидовая конкуренция и миграция. Показана глобальная устойчивость положения равновесия динамической системы, описывающей взаимодействие популяций хищника и жертвы, при наличии внутривидовой конкуренции.

На сегодняшний день, теория оптимального фуражирования имеет широкое применение не только в экологии, но и в других областях науки, требующих

[4] Charnov E. L. Optimal foraging: The marginal value theorem // Theoretical Population Biology.–1976.–Vol. 9.–P. 129–136.

принятия решения.

Актуальность работы заключается в разработке математических методов, применимых к исследованию задач целью которых является сохранение экологического баланса или анализ миграционных потоков населения с целью прогнозирования его численности.

Целью диссертационной работы является разработка методов математического моделирования, численных методов и комплекса программ для исследования и прогноза динамики процессов оптимального фуражирования.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Задача математического моделирования и анализа динамики распределения популяции по ареалам (пункты 1,2 паспорта специальности 05.13.18).
2. Задача моделирования и анализа динамической системы с переменной структурой с учетом влияния внутривидовой конкуренции и миграции (пункты 1,2 паспорта специальности 05.13.18).
3. Задача математического моделирования динамики численности населения на территории Российской Федерации с учетом распределения Больцмана (пункт 1 паспорта специальности 05.13.18).
4. Разработка модификации численного метода и проведение серии вычислительных экспериментов для идентификации параметров математической модели в задаче миграции населения на территории Российской Федерации с учетом распределения Больцмана (пункт 3 паспорта специальности 05.13.18).
5. Разработка комплекса программ для реализации идентификации параметров математической модели в задаче миграции населения на территории Российской Федерации (пункт 4 паспорта специальности 05.13.18).

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Введено понятие области предпочтительной полезности и построены области предпочтительной полезности ареалов с учетом функций полезности, входящих в распределение Больцмана.

2. Доказана устойчивость по Ляпунову распределения Больцмана для двух ареалов.

3. Доказана глобальная устойчивость динамической системы типа «хищник-жертва» с переменной структурой с учетом влияния внутривидовой конкуренции и миграции.

4. Предложена и численно исследована математическая модель динамики численности населения на территории РФ с учетом распределения Больцмана.

5. Предложена модификация численного метода для идентификации параметров математической модели в задаче миграции населения на территории РФ с учетом распределения Больцмана.

6. Разработан комплекс программ для реализации идентификации параметров математической модели в задаче миграции населения на территории РФ.

Теоретическая значимость работы состоит в следующем:

1. Введено понятие областей предпочтительной полезности ареалов.

2. Доказана устойчивость по Ляпунову распределения Больцмана для двух ареалов.

3. Доказана глобальная устойчивость динамической системы, описывающей взаимодействие двух популяций хищника и жертвы, с переменной структурой с учетом влияния внутривидовой конкуренции и миграции.

4. Предложена математическая модель динамики численности населения на территории РФ с учетом распределения Больцмана.

5. Предложена модификация численного метода для идентификации параметров предложенной математической модели в задаче миграции населения на территории РФ.

Практическая значимость работы состоит в следующем:

1. Построены области предпочтительной полезности ареалов с учетом функций полезности, входящих в распределение Больцмана.

2. Разработана математическая модель динамики численности населения на территории РФ с учетом распределения Больцмана.

3. Разработан комплекс программ для реализации модификационного численного метода для идентификации параметров математической модели в задаче миграции населения на территории РФ с учетом распределения Больцмана.

Положения, выносимые на защиту: 1. Метод математического моделирования динамики распределения популяции по ареалам, основанный на понятии распределения Больцмана в контексте теории оптимального фуражирования (пункт 1 паспорта специальности 05.13.18).

2. Метод математического моделирования взаимодействия популяций на основе динамической системы с переменной структурой с учетом внутривидовой конкуренции и миграции (пункт 1 паспорта специальности 05.13.18).

3. Метод математического моделирования динамики численности населения на территории РФ с учетом распределения Больцмана. (пункт 1 паспорта специальности 05.13.18).

4. Модификация численного метода параметрической идентификации с учетом функции чувствительности (пункт 3 паспорта специальности 05.13.18).

5. Комплекс программ, реализующий модифицированый численный метод параметрической идентификации математической модели в задаче миграции населения на территории РФ при различных значениях параметра оптимальности, входящего в распределение Больцмана (пункт 4 паспорта специальности 05.13.18).

Часть результатов диссертации получена в рамках исследований, проводимых по гранту РФФИ 18-01-00249а.

Апробация результатов.

Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

1. Пятая Национальная научноая конференция с международным участием «Математическое моделирование в экологии», Кириллов А.Н., Данилова И. В. Динамическая модель распределения популяций по ареалам в задачах фуражирования. 16–20 октября 2017 г., Пущино, Россия.

2. III Baltic International Symposium on Applied and Industrial Mathematics, Данилова И. В. Dynamics of population patch distribution. 19–20 апреля 2018 г., Санкт – Петербург, Россия.

3. XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019, Данилова И. В. Задача оптимального поведения популяции в ареале с учетом внутривидовой конкуренции и миграции. 17–20 июня 2019 г., Москва, Россия.

4. LI международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» Control Processes and Stability (CPS'20), Данилова И.В. Распределение Больцмана в задаче миграции и динамики численности населения. 20–24 апреля 2020 г., Санкт–Петербург, Россия.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 5 статей — в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации [1–5], из них: 2 статьи в журналах, индексируемых в библиографических базах Scopus и Web of Science [2, 3] и 1 статья в библиографической базе Scopus [4], 2 статьи в сборниках трудов конференций [9, 10] и 2 тезиса докладов [7, 8]. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [11].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Объем диссертации 207 страниц. Список литературы содержит 131 наименование.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность исследований, сформулирована цель диссертационной работы, аргументирована научная новизна исследований, показана практическая и теоретическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения, приведен краткий обзор содержания диссертацилнной работы по главам.

В первой главе диссертационной работы проводится обзор литературы по теме исследования. На основе изученной литературы, выделяются основные задачи теории оптимального фуражирования:

1. Выбор популяцией оптимального ареала.

2. Определение оптимального времени нахождения популяции в ареале.

3. Моделирование траектории движения популяции среди ареалов.

Для решения задачи выбора популяцией оптимального ареала была предложена теория идеального свободного распределения. Распределение популяции по m ареалам называется идеальным свободным распределением, если выполняются два условия: 1) популяция занимает $k < m$ ареалов и 2) в занятых популяцией k ареалах скорость потребления энергии максимальна и одинакова, а в незанятых достаточно мала. Поскольку предложенная концепция не смогла полно отразить природные процессы, то в качестве альтернативы было предложено распределение Больцмана, которое в статистической физике описывает вероятность попадания термодинамической системы в то или иное состояние. В контексте теории оптимального фуражирования это распределение имеет вид:

$$P_{ij} = \frac{e^{qU_{ij}}}{\sum_{k=1}^{m} e^{qU_{ik}}}, i, j = 1, .., m,$$

где P_{ij} – вероятность перехода популяции из ареала i в ареал j, если популяция находится в ареале i, m – количество ареалов, $U_{ij}(d_{ij})$ —полезность ареала j с точки зрения популяции, находящейся в ареале i, d_{ij} — расстояние от ареала i до ареала j, q — положительный параметр, характеризующий оптимальность распределения популяции по ареалам, если значение параметра q достаточно мало, то популяция распределится по ареалам случайнным образом, если же значение q достаточно велико, то распределение популяции по ареалам будет распределением Больцмана. При этом, функция полезности $U_{ij}(d_{ij})$ учитывает меру информированности популяции об ареале j и затраты на перемещение к нему: $U_{ij}(d_{ij}) = I_{ij}(d_{ij})V_j - T_{ij}(d_{ij}) + (1 - I_{ij}(d_{ij}))\overline{V}, i \neq j, i, j = 1, ..., m$, где $I_{ij}(d_{ij})$ – мера информированности популяции, находящейся в ареале i об ареале j, при этом $I_{ij}(d_{ij}) \in [0, 1]$, $T_{ij}(d_{ij})$ — затраты на перемещение из ареала i

в ареал j, V_j — истинная полезность ареала j, $\overline{V}$ — средняя истинная полезность ареалов.

Предполагается, что мера информированности $I_{ij}(d_{ij})$ обладает следующими свойствами:

1. Чем дальше популяция находится от рассматриваемого ареала, тем меньшей информацией о нем она владеет: $\lim\limits_{d_{ij}\to\infty} I_{ij}(d_{ij}) = 0$.

2. Популяция имеет полную информацию об ареале, в котором находится: $I_{ii} = 1$.

В настоящей работе расматриваются следующие задачи:

1. Задача выбора популяцией ареала при условии перемещения в среде, содержащей ареалы.

2. Задача оптимального поведения популяции в некотором ареале, с учетом внутривидовой конкуренции и миграции.

4. Приложение распределения Больцмана в моделировании и численном анализе миграции населения внутри РФ.

Во второй главе рассматривается задача 1. В параграфе 2.1 приводится пример функции полезности, которая зависит от расстояния между популяцией и ареалом:

$$U_i(d_i) = e^{-\beta d_i^2} V_i - \alpha d_i^2, \tag{1}$$

где $I(d_i) = e^{-\beta d_i^2}$ — мера информированности об i-ом ареале у популяции, находящейся на расстоянии d_i от него, β — коэффициент «забывания» информации об ареале. Чем меньше β, тем медленнее «забывается» информация об истинной полезности V_i ареала i с ростом расстояния до него, $T(d_i) = \alpha d_i^2$ — затраты популяции при перемещении к i–му ареалу на расстояние d_i. Пусть $V_2 > V_1$. Несложно заметить, что мера информированности об i-ом ареале, $I(d_i)$, максимальна при $d_i = 0$ и $I(d_i) \to 0$ при $d_i \to \infty$. Ключевым слагаемым в предложенной функции полезности является мера информированности популяции о рассматриваемом ареале, которая в свою очередь, содержит коэффициент, характеризующий уровень «забываемости» популяцией рассматриваемого ареала. Показано влияние коэффициента «забываемости» на меру информированности.

В параграфе 2.2 вводится общая функция полезности, зависящая не только от расстояния, но и от времени. Эта зависимость возникает за счет накопления популяцией информации об ареале с ростом времени t. Приводятся свойства функции полезности и входящих в неё компонент: меры информированности и функции затрат на перемещение.

Введем функцию полезности ареала i в момент времени t для популяции, находящейся на расстоянии d_i от него:

$$U_i(d_i,t) = V_i I_i(d_i,t) + (1 - I_i(d_i,t))\overline{V} - T_i(d_i), i = 1,..,m \qquad (2)$$

где $I_i(d_i,t)$ — мера информированности популяции об ареале i, $I_i(d_i,t) \in [0,1]$, V_i — истинная полезность ареала i, $\overline{V} = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2 + ... + \gamma_m V_m$ — средняя полезность ареалов для популяции, находящейся в ареале i, $\gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_m = 1$, $\gamma_i \geq 0$, $T_i(d_i)$ — функция затрат на перемещение в ареал i,$\dfrac{\partial T_i}{\partial d_i} \geq 0$. Из (2) следует, что структура функции полезности U_i существенно зависит от информационной обеспеченности популяции об ареале i, которая представлена первыми двумя слагаемыми.

Мера информированности $I_i(d_i,t)$ имеет следующие свойства:

1. Популяция имеет полную информацию об ареале, в котором находится: $I_i(0,t) = 1$, при любом $t \in R$.

2. Чем дальше удалена популяция от ареала i, тем меньшей информацией о величине V_i она обладает: $\dfrac{\partial I_i}{\partial d_i} < 0$, $\lim\limits_{d_i \to \infty} I_i(d_i,t) = 0$.

3. С ростом времени t информированность популяции об ареале i растет: $\dfrac{\partial I_i}{\partial t} > 0$, $\lim\limits_{t \to \infty} I_i(d_i,t) = 1$.

Будем считать ареал «хорошим», если $V_i > \overline{V}$ и «плохим», если $V_i < \overline{V}$. С учетом свойств меры информированности $I_i(d_i,t)$, формулируются свойства для функции полезности $U_i(d_i,t)$:

1. С ростом времени t полезность «плохого» ареала убывает, а полезность «хо-

рошего» ареала растет.

2. При увеличении расстояния d_i от популяции до «хорошего» ареала i, $V_i > \overline{V}$, его полезность убывает.

3. При увеличении расстояния d_i от популяции до «плохого» ареала i, $V_i < \overline{V}$, его полезность либо убывает, либо возрастает.

В параграфе 2.3 рассматриваются условия выбора популяцией ареала с учетом изменения меры информированности популяции о нем с течением времени. Для случая двух ареалов вводится функция полезности:

$$U_i(d_i, t) = V_i e^{-\frac{\beta d_i^2}{t+C}} + (1 - e^{-\frac{\beta d_i^2}{t+C}})\overline{V} - \alpha d_i^2, i = 1, 2, \qquad (3)$$

где $\overline{V} = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2$. Предполагается, что второй ареал более привлекателен, чем первый: $V_1 < V_2$. Доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть* $d_1^2 > \dfrac{\gamma_2(V_2 - V_1)}{ae}$. *Тогда* $\dfrac{\partial U_1}{\partial d_1} < 0$ *при любом* $t \geq 0$.

Утверждение 2. *Пусть* $d_1^2 < \dfrac{\gamma_2(V_2 - V_1)}{ae}$. *Тогда существуют такие* $\widetilde{t_1}$, $\widetilde{t_2}$, $\widetilde{t_1} < \widetilde{t_2}$, *что* $\dfrac{\partial U_1}{\partial d_1} < 0$ *при* $0 \leq t < \widetilde{t_1}$ *и* $t > \widetilde{t_2}$, $\dfrac{\partial U_1}{\partial d_1} > 0$ *при* $t \in (\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2})$.

В параграфе 2.4 с учетом функций полезности (1) и (3) строятся области предпочтительной полезности (ОПП) и вводится понятие этих областей. Показана кинематика областей предпочтительной полезности для случая изменения меры информированности с течением времени. Обозначим через $M(x, y)$ положение популяции в $\mathbb{R}^2$, и через $A_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, .., m$ обозначим ареалы. Введем определение ОПП для случая, когда мера информированности I_i зависит неявно от времени t.

Определение 1. *Область предпочтительной полезности* D_i *ареала* A_i *— это множество точек* M *вида*

$$D_i = \{M \in R^n : \rho(M, A_i) = d_i, U_i(d_i) > U_j(d_j), i \neq j, j = 1, .., m\}.$$

Для функций полезности (1) получена граница ОПП для ареалов $A_1 = (-1,0)$, $A_2 = (1,0)$ –кривая $y^2 = \dfrac{1}{\beta}\ln\dfrac{V_1e^{-2\beta x} - V_2e^{2\beta x}}{4\alpha e^{\beta(x^2+1)}x}$.

Замечание 1. *Разбиение пространства с ареалами на ОПП в случае $n = 2$ при $U_i(d_i) = -d_i$ является диаграммой Вороного.*

Введем оределение ОПП в случае явной зависимости меры информированности от времени.

Определение 2. *Область предпочтительной полезности $D_i(t)$ ареала A_i — это множество вида $D_i(t) = \{M(t) \in R^n : \rho(M(t), A_i) = d_i(t), U_i(d_i(t), t) > U_j(d_j(t), t), i \neq j, j = 1, .., m\}$.* Здесь $U_i(d_i(t), t)$ — функция полезности.

Из определения следует, что границы областей $D_i(t)$ изменяются с течением времени. Рассмотрим вопрос «захвата» ареала A_1 областью предпочтительной полезности ареала A_2 для функции полезности (3). Пусть $E = \ln\dfrac{\gamma_1(V_2 - V_1)}{\gamma_2(V_1 - V_2) + 4\alpha}$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. *Для того, чтобы существовал такой момент времени $t = t^* \geq 0$, что $A_1 \in D_2(t)$ при всех $t \geq t^*$ необходимо и достаточно чтобы $\dfrac{(V_2 - V_1)}{4} > \alpha$. При этом: $t^* = \frac{4\beta}{E} - C$, если $\alpha > \gamma_2\dfrac{(V_2 - V_1)}{4}$ и $C \leq \dfrac{4\beta}{E}$, или $t^* = 0$, если $\alpha > \gamma_2\dfrac{(V_2 - V_1)}{4}$ и $C > \dfrac{4\beta}{E}$ или если $\alpha \leq \gamma_2\dfrac{(V_2 - V_1)}{4}$.*

В параграфе 2.5 вводится динамическая система, которая описывает изменение вероятности выбора популяцией ареала:

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = q \cdot P_1 \cdot (P_2 \cdot \varphi_{12}(t) + ... + P_m \cdot \varphi_{1m}(t)) \\ \dot{P}_2 = q \cdot P_2 \cdot (P_1 \cdot \varphi_{21}(t) + ... + P_m \cdot \varphi_{2m}(t)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{P}_m = q \cdot P_m \cdot (P_1 \cdot \varphi_{m1}(t) + ... + P_{m-1} \cdot \varphi_{mm-1}(t)), \end{cases}$$

где $\varphi_{ij}(t) = \dot{U}_i - \dot{U}_j$. При этом, распределение Больцмана является частным решением предложенной динамической системы.

Для случая $m = 2$ получим:

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = q \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \varphi(t) \\ \dot{P}_2 = -q \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \varphi(t), \end{cases} \tag{4}$$

где $\varphi_{12}(t) = \varphi(t)$.

Доказана устойчивость распределения Больцмана.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(t)$ непрерывна, тогда решение системы (4), являющееся распределением Больцмана, устойчиво по Ляпунову.*

Часть результатов главы 2 представлена в работах [1, 3, 4].

В третьей главе рассматривается задача оптимального поведения популяции в ареале с учетом миграции и внутривидовой конкуренции. Рассматриваемая задача делится на две:

1. Задача оптимального поведения одновидовой популяции в ареале с учетом миграции.

2. Задача оптимального поведения двухвидовой популяции с учетом миграции и внутривидовой конкуренции.

В параграфе 3.1 рассматриается задача оптимизации численности одновидовой популяции в ареале с учетом миграции из него. Исследуется вопрос определения доли популяции p численностью $x(t, p)$ в некоторый момент времени T, которая останется в ареале.

В параграфе 3.2 предлагается и исследуется расширенная модель Лотки-Вольтерры, описывающая динамику численности популяции хищника и жертвы с учетом параметров, характеризующих внутривидовую конкуренцию в популяции жертв и миграцию из ареала обеих популяций – хищника и жертвы:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(ap - bp^2x - \mu_1(1-p)) - cpxqy, \\ \dot{y} = qy(kcpx - m) - \mu_2(1-q)y, \end{cases} \tag{5}$$

где $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — численности популяций жертв и хищников соответственно, px и qy — численности популяции жертв и хищников остающихся в ареале, p и q — доли жертв и хищников, остающихся в ареале, $p \in [0, 1]$, $q \in [0, 1]$, a — коэффициент роста популяции жертв в рассматриваемом ареале, b — коэффициент внутривдовой конкуренции в популяции жертв, μ_1 — коэффициент миграции жертв из участка за единицу времени, c — коэффициент, характеризующий интенсивность потребления популяции жертв популяцией хищников за единицу времени, k —доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство, m — коэффициент смертности хищников, μ_2 — коэффициент миграции популяции хищников из ареала момент времени t. Предполагается, что выполняются следующие условия: $a > \mu_1$, $m < \mu_2$. В совокупности, эти условия означают, что ареал благоприятен для популяции жертв и, следовательно, благоприятен для популяции хищников.

Ставится задача нахождения долей p и q, которые максимизируют мгновенные скорости изменения численностей популяции жертв и хищников – $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Соответствующие доли p и q характеризуют оптимальное поведение популяций хищников и жертв в ареале, с учетом внутривидовой конкуренции и миграции.

Вводятся функции выигрыша для популяций жертвы и хищника, соответственно: $H_1(p, q) = ap - bp^2x - \mu_1(1-p) - cpqy$, $H_2(p, q) = q(kcpx - m) - \mu_2(1-q)$. Тогда система (5) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = xH_1(p, q), \\ \dot{y} = yH_2(p, q), \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, возникает игра с двумя участниками—популяциями хищника и жертвы, где p и q —стратегии популяции жертвы и хищника соответственно. Назовем эту игру «конкуренция–миграция»[5]. В качестве принципа оптимальности используется равновесие по Нэшу $(p^*, q^*) \in [0, 1]^2$, где $H_1(p^*, q^*) \geq$

[5] Иванова А.С., Кириллов А.Н. Равновесие и управление в задаче сохранения видового состава биосообщества // Управления в медико-биологических и экологических системах.–2015.– №55.– С.– 239–258.

$\geq H_1(p, q^*),\ H_2(p^*, q^*) \geq H_1(p^*, q)$.

Введем следующие множества: $D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : y \geq \dfrac{a + \mu_1}{c}\right\} \setminus \{T\}$, $T =$

$= \left(0, \dfrac{a + \mu_1}{c}\right) \in \mathbb{R}^2_+ \Big\}$, $D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : \dfrac{a + \mu_1 - 2bx}{c} \leq y \leq \dfrac{a + \mu_1}{c}\right\} \setminus \{T\}$, $D_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : y \leq \dfrac{a + \mu_1 - 2bx}{c}\right\} \setminus \{T\}$, где $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Теорема 2. *Равновесие по Нэшу (p^*, q^*) в игре «конкуренция–миграция» имеет вид:*

$$(p^*, q^*) = \begin{cases} (0, 1),\ (x, y) \in D_1, \\ \\ (\widehat{p}, 1),\ \widehat{p} = \dfrac{a + \mu_1 - cy}{2bx},\ (x, y) \in D_2, \\ \\ (1, 1),\ (x, y) \in D_3, \\ \\ (p, 1),\ \forall p \in [0, 1],\ (x, y) = T. \end{cases}$$

При подстановке в систему (6) значений равновесных стратегий по Нэшу (p^*, q^*), получим систему с переменной структурой (СПС):

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu_1 x, \\ \dot{y} = -my,\ (x, y) \in D_1. \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{4b}\Big((a - cy + \mu_1)^2 - 4\mu_1 bx\Big), \\ \dot{y} = ykc\Big(\dfrac{a - cy + \mu_1}{2b} - \dfrac{m}{kc}\Big),\ (x, y) \in D_2. \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx - cy), \\ \dot{y} = y(kcx - m),\ (x, y) \in D_3. \end{cases} \tag{9}$$

В точке T векторное поле не определено однозначно.

Получены положения равновесия для систем (7)–(9):$(0,0)$ —для системы (7); $B=\left(\dfrac{m^2b}{k^2c^2\mu_1},\dfrac{(a+\mu_1)\,kc-2bm}{kc^2}\right)$, $E=\left(\dfrac{(a+\mu_1)^2}{4\mu_1 b},0\right)$ —для системы (8); $(0,0)$, $H=\left(\dfrac{a}{b},0\right)$ и $F=\left(\dfrac{m}{kc},\dfrac{akc-bm}{kc^2}\right)$ —для системы (9).

Исследовано расположение равновесий B и F в плоскости, в зависимости от соотношений параметров. Исследована устойчивость найденных положений равновесия. Введем обозначения $l\,:\,2bx+cy=a+\mu_1$ прямая, которая делит $\mathbb{R}^2_+$ на две полуплоскости: $\Pi_1=\{(x,y):2bx+cy\le a+\mu_1\}$ и $\Pi_2=\{(x,y):2bx+cy\ge a+\mu_1\}$. Пусть $[ST]\subset l$ —отрезок, являющийся общей частью границ множеств D_1 и D_2. Доказаны следующие утверждения.

Утверждение 4. *Точки касания траекторий систем (8) и (9) с прямой l совпадают. При этом отрезку $[ST]\subset l$ принадлежит единственная общая точка касания.*

Утверждение 5. *Пусть $B\in\operatorname{int}\mathbb{R}^2_+$. Тогда B глобально устойчиво в $\operatorname{int}\mathbb{R}^2_+$ для системы (8), заданной в $\mathbb{R}^2_+$.*

Теорема 3. *Пусть $\dfrac{bm}{kc}\in\left[\mu_1,\ \dfrac{a+\mu_1}{2}\right]$, то есть положения равновесия B и F принадлежат области D_2. Тогда B — глобально устойчивое положение равновесия СПС (8)–(9).*

Теорема 4. *Пусть положения равновесия B и F принадлежат области D_3. Если не существует предельного цикла СПС, то F —глобально устойчивое положение равновесия СПС (7)–(9).*

Теорема 5. *Пусть положения равновесия B и F принадлежат области D_3. Если существуют предельные циклы СПС, то все траектории СПС, начинающиеся в точках принадлежащих области, ограниченной предельным циклом СПС с наименьшим диаметром, стремятся к точке F.*

Теорема 6. *Если положения равновесия B и F принадлежат $[ST]$, то $B=F$ и это равновесие глобально устойчиво в $\operatorname{int}\mathbb{R}^2_+$.*

Таким образом, из утверждений 4–5 и теорем 3–6 следует, что комплекс таких естественных факторов как внутривидовая конкуренция и миграция стабилизирует численности взаимодействующих популяций в рассматриваемом ареале.

Часть результатов третьей главы опубликованы в работах [2, 6, 9].

В четвертой главе рассматривается задача миграции населения внутри территории Российской Федерации.

Предлагается математическая модель, описывающая динамику численности населения на рассматриваемой территории i, при этом, в данной модели не учитывается приток мигрантов из-за границы и отток населения за границу:

$$\dot{x_i} = k_i(1 - \gamma_i(1 - p_i))x_i - \sum_{j, j \neq i} \gamma_i p_j x_i + \sum_{j, j \neq i} \gamma_j p_i x_j, i, j = 1, ..., N, \qquad (10)$$

где x_i, x_j — численности населения территорий i и j, соответственно, k_i — коэффициент естественного прироста населения территорий i γ_i, γ_j — доли подвижного населения территорий i и j, p_i, p_j — вероятности выбора населением территории i и j, тогда $\gamma_{ij} = \gamma_i p_j, i, j = 1, ..., N$ — доля населения территории i, переходящая на территорию j с вероятностью p_j. Вероятность выбора территории j будем описывать распределением Больцмана: $p_j = \dfrac{e^{qU_j}}{\sum_{j=1}^{N} e^{qU_j}}, j = 1, ..., N$, $U_j = V_j \dfrac{\beta_j x_j}{\beta_j x_j + c_j}$ — функция полезности, которая характкризует оценку территории j с точки зрения мигрирующего населения, V_j — константа, характеризующа истинную полезность территории j, под истинной полезностью будем понимать индекс дохода населения данной территории, являющийся одной из компонент для расчета индекса индекса человеческого развития (ИЧР), $I_j = \dfrac{\beta_j x_j}{\beta_j x_j + c_j}$ — мера информированности населения о качестве территории j, или мера притягательности территории j, β_j — доля населения территории j, имеющая доход выше прожиточного минимума, c_j — константа, характеризующая накопленную в среднем информацию о террирттории j в течение рассматриваемого периода времени. Параметр q характеризует оптимальность распределения населения среди заданных территорий.

Проводится идентификация набора параметров $S = (\gamma_1, .., \gamma_N, k_1, .., k_N)$ системы (10) при различных значениях параметра оптимальности q с помощью модифицированного метода градиентного спуска с дроблением шага, который реализован на языке программирования Python 3.5. При этом предполагается, что параметры β_j, V_j, c_j — постоянные. В качестве начальных значений идентифицируемых парметров набора S берутся средние значения долей мигрирующего населения γ_i территории i и средние значения коэффициентов естественного прироста k_i территории i на рассматриваемом промежутке времени $t \in [0, n]$. Постоянные параметры β_j, V_j, c_j расчитываются аналогичным образом. При этом, предполагается, что носителем информации об истинной полезности V_j территории j в момент времени t является все население x_j живущее на данной территории в данный момент времени. Для расчета средних значений параметров системы (10) используются данные из официальных статистических источников [6].

Для идентификации набора параметров S системы (10) решается задача минимизации следующей функции:

$$F(S) = \delta_1 \sum_{r=1}^{n} (x_{1r} - x^*_{1r}(t_r, S))^2 + ... + \delta_N \sum_{r=1}^{N} (x_{Nr} - x^*_{Nr}(t_r, S))^2, \qquad (11)$$

где x_{jr} — статистические значения численности населения в момент времени $t_r, j = 1, .., N, r = 1, .., n$ на территории j, а x^*_{jr} — решения системы (10), найденные методом Рунге–Кутты при наборе параметров S, δ_j — масштабирующий параметр для функционала (11), который можно проинтерпретировать как среднюю долю численности населения территории j на рассматриваемом промежутке времени $t \in [0, n]$, при этом $\sum_{j=1}^{n} \delta_j = 1$. Проверяется значение меры чувствительности $\eta_l = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{r=1}^{2n} (m^j_{rl})^2}$, где $m^j_{rl} = \sqrt{\delta_j} \frac{x^*(S + \xi S_l) - x^*(S)}{\xi s_l}$ –величина, характеризующая чувствительность модельных значений численности населе-

[6] The official website of the Federal Statistics Federal State Statistics Service. Available from:https://rosinfostat.ru/vrp. (Accesed: 26.12.2018).

ния $x^*(S)$ территории j в момент времени t_r, $r = 1, ..., n$ при некотором значении параметра оптимальности q, ξS_l — вектор–столбец, в котором все компоненты нулевые кроме l–ой, $l = 1, ..., N_p$, где N_p — количество параметров в наборе S.

Пусть $M = \{m^j_{rl}\}$ –матрица, элементами которой являются значения m^j_{rl}. В результате нормирования столбцов матрицы M получим матрицу $\widetilde{M} = \{\widetilde{m}^j_{rl}\}$. Далее вводится индекс коллинеарности $\tilde{\gamma}_k = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$ подмножества K, где λ_k — наименьшее собственное число матрицы $\widetilde{M}^T_k \widetilde{M}_k$, где $\widetilde{M}_k$ — матрица, которая содержит k вектор–столбцов матрицы M. Идентификация параметров осуществляется с помощью модифицированного метода градиентного спуска с дроблением шага. Данный метод модифицирован с учетом основ и способов реализации идей теории чувствительности[7][8]. Пусть S^*_{min} — точка минимума функционала $F(S)$, $S_{h\varepsilon}$ — координаты некоторой точки на поверхности $F(S)$ на шаге h при фиксированном значении ε, которое является оценкой нормы градиента функционала $F(S)$, то есть должно выполняться условие $\|gradF(S)\| < \varepsilon$, $\omega = |S^*_{min} - S_{h\varepsilon}|$. Пусть $e_{jr} = \sqrt{\delta_j}(x_{jr} - x^*_{jr}(S))$ — масштабированное отклонение вектора статистических данных от вектора модельных значений в момент времени t_r, $r = 1, ..., n$. Тогда $E^{jr} = (e_{11}, ..., e_{Nn})^T$ —вектор–столбец таких отклонений. Далее находятся решения $X(S)$ и $X(S + \xi S_l)$ с помощью метода Рунге–Кутты четвертого порядка и определяется градиент функционала $F(S)$: $gradF(S) = \Big(\dfrac{\partial F(S)}{\partial s_1}, ..., \dfrac{\partial F(S)}{\partial s_k}\Big) = gradF(S) = -2M^T E^{jr}$.

Поиск точки минимума S^*_{min} прекращается, если выполняется условие

$$\|gradF(S)\| < \varepsilon,$$

в противном случае шаг h дробится и поиск продолжается. На основе результатов параметрической идентификации анализируются миграционные потоки населения среди заданных территорий и строятся прогнозы численности на-

[7] Chai, Q. Modeling, Estimation, and Control of Biological Wastewater Treatment Plants. Doctoral Theses at NTNU 2008:108 at HiT / Q. Chai. — Porsgrunn,2008.

[8] Розенвассер, Е. Н. Чувствительность систем автоматического управления / Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов.— Л. : Энергия, 1969.— 208 с.

селения. Для реализации параметрической идентификации предложенной математической модели (10) с помощью модифицированного численного метода написан комплекс программ на языке Python 3.5. Приведены полученные при реализации программного комплекса результаты численные результаты и их анализ. Комплекс программ приведен в приложениях А и Б диссертации.

В работе рассматривается задача миграции населения на территории РФ для двух случаев: 1) территория РФ делится на две части и 2) территория РФ делится на три части. В обоих случаях рассматривается миграция между заданными частями территории РФ.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [5, 10]. Получено свидетельство о регистрации прогаммы ЭВМ в задаче миграции населения [11]

Заключение

В работе представлены результаты решения задачи выбора популяцией наиболее пригодного ареала с учетом распределения Больцмана. Распределение Больцмана рассматривалось в контексте теории оптимального фуражирования, были построены функции полезности, входящие в него. Главным компонентом которых является мера информированности, влияющая на оценку популяцией рассматриваемых ареалов. При этом, рассматриваются случаи неявной и явной зависимости меры информированности от времени. На основе этих примеров строятся области предпочтительной полезности. В случае явной зависимости от времени, показана кинематика изменения этих областей. Так же исследованы свойства функции полезности и влияние меры информированности на выбор популяции ареала в общем случае. Доказана устойчивость распределения Больцмана для задачи выбора популяцией наиболее пригодного ареала из чего следует применимость распределения Больцмана в прикладных задачах.

Так же в работе исследовалась задача оптимального поведения популяции в некотором ареале. Для одновидовой популяции исследовались условия при которых максимизируется численность популяции в некоторый момент времени T. Для двухвидовой популяции исследовались условия существования равновесных по Нэшу стратегий. С учетом полученных равновесных стратегий, была построена и исследована система с переменной структурой. Установлена глобальная устойчивость найденных положений равновесия рассматриваемой системы.

В работе предложена математическая модель, описывающая динамику численности населения на территории РФ с учетом распределения Больцмана. Для предложенной математической модели проводилась идентификация параметров с помощью модифицированного метода градиентного спуска с переменным шагом для различных значений параметра оптимальности, входящего в распределение Больцмана. Модификация численного метода была осуществлена с учетом функции чувствительности. Создан комплекс программ для реализации параметрической идентификации предложенной математической модели с помощью модифицированного численного метода.

Список публикаций

1. Кириллов А. Н., Данилова И. В. Динамика распределения популяции по ареалам // Моделирование и анализ информационных систем.– 2018.– Т. 25, № 3.– С 268–275. (**ВАК**)
2. Кириллов А. Н., Данилова И. В. Динамика оптимального поведения двухвидового сообщества с учетом внутривидовой конкуренции и миграции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.–2019.– Т. 29. Вып. 4.– С. 518–531. (**ВАК, Web of Science, Scopus**)
3. Kirillov A. N., Danilova I. V. Dynamics of Population Distribution by Patches // Automatic Control and Computer Sciences.– 2019. –Vol. 53, No. 7.– P. 738–744. (**ВАК, Web of Science, Scopus**)
4. Kirillov A. N., Danilova I. V. Utility function in the foraging problem with imperfect information // Информационно-управляющие системы

[Information and Control Systems].– 2020.– №2.– P. 71–77. (**ВАК, Scopus**)

5. Данилова И. В., Кириллов А. Н., Крижановский А. А. Распределение Больцмана в задаче миграции населения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии.– 2020.– № 2.– С. 92–102. (**ВАК**)
6. Кириллов А.Н., Данилова И.В. Динамика процесса биоочистки при переменном входном потоке загрязнений:инвариантные множества и стабилизация // Труды Карельского научного центра РАН.–2020.–№ 7.–С. 67–71.
7. Кириллов А.Н., Данилова И.В. Динамическая модель распределения популяции по ареалам в задаче фуражирования // Материалы Пятой Национальной научной конференции с международным участием «Математическое моделирование в экологии».–2017.– С. 98–99.
8. Danilova I. V. Dynamics of populationpatch distribution // III Baltic International Symposium on Applied and Industrial Mathematics. Op&Pm surveys on applied and industrial mathematics.– 2018.– Vol. 25, iss. 2. Url: http://tvp.ru/conferen/bisaimIII/repso078.pdf
9. Данилова И. В. Задача оптимального поведения популяции в ареале с учетом внутривидовой конкуренции и миграции // Сборник трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ–2019. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.– 2019.– М.: ИПУ РАН.– С. 1476–1479.
10. Данилова И. В. Распределение Больцмана в задаче миграции и динамики численности населения // Процессы управления и устойчивость. Труды LI международной научной конференции аспирантов и студентов.– 2020.–Т.7, № 1.– С. 376–80.
11. Данилова И. В. Программа для ЭВМ «Идентификация параметров в задаче миграции населения».– Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020613073 от 10.03.2020.