На правах рукописи

Иванова Александра Сергеевна

Методы математического моделирования в задаче сохранения видовой структуры биологического сообщества

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Петрозаводск – 2020

Работа выполнена в *Институте прикладных математических исследований – обособленном подразделении Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального исследовательского центра «Карельский научный центр Российской академии наук».*

Научный руководитель: **Кириллов Александр Николаевич**
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Топаж Александр Григорьевич**
доктор технических наук, заместитель генерального директора по научной работе ООО «Бюро Гиперборея», г. Санкт-Петербург

Флегонтов Александр Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных систем ФГБОУ ВО «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук

Защита состоится «25» декабря 2020 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета *Д 212.190.03* при *ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет»*, расположенном по адресу: *185910, Республика Карелия, г. Петрозаводск, пр. Ленина, д. 33.*

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке *Петрозаводского государственного университета и на сайте petrsu.ru.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2020 г.

Ученый секретарь диссертационного совета *Р.В. Воронов*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Поддержание биологического разнообразия является актуальной и острой проблемой, стоящей перед человечеством. В 1992 г. было принято международное соглашение — Конвенция о биологическом разнообразии, имеющая своей целью сохранение биоразнообразия, которое находится под угрозой в результате антропогенного воздействия на окружающую среду, что приводит к перманентному исчезновению видов. В связи с этим возникает проблема сохранения биологических сообществ в их естественных средах обитания. При этом, естественно, стремиться сохранить как видовой биосостав, так и тип взаимодействия между популяциями. В дальнейшем совокупность видов и типов взаимодействий между ними будем называть видовой структурой биосообщества.

В работе предполагается, что среда обитания нескольких взаимодействующих популяций разных видов – пространство, на котором расположено некоторое количество участков, содержащих пищевой ресурс. Поскольку процессы взаимодействия видов носят динамический характер, то в качестве моделей соответствующих процессов используются динамические системы. Использование динамических систем позволяет адекватно прогнозировать поведение взаимодействующих популяций, что невозможно сделать с помощью проведения натурных экспериментов. Также предполагается, что популяция потребляет ресурс, находящийся на участке. С течением времени популяция испытывает недостаток ресурса и покидает участок. Это может привести к нарушению трофических цепочек (связей) на данном участке, т.е. к исчезновению некоторых видов. Кроме того, в процессе миграции объем популяции может сократиться, что тоже может привести к ее исчезновению. Из вышесказанного следует значимость и актуальность разработки методов математического моделирования для решения задачи сохранения видовой структуры биологического сообщества участка, местообитания.

Задаче определения времени ухода популяции из участка посвящены исследования Э. Чарнова (E. Charnov), в которых определяется момент мгновенного ухода популяции из участка (маргинальная теорема). Экспериментальные наблюдения показывают несоответствие принципа Э. Чарнова реальным процессам ухода, которым свойственна инерционность. Следовательно, необходима разработка новых подходов для моделирования процесса ухода. Для предотвращения ухода требуется внешнее воздействие, в частности, изъятие особей популяций, сохраняющее биоценоз. Существующие же математические модели изъятия особей направлены на решение задач оптимальной эксплуатации биоресурсов. Для сохранения видовой структуры требуется решение другой задачи, а именно, задачи изъятия особей популяций с целью выживания вида (задачи выживаемости), из чего следует необходимость разработки новых методов математического моделирования.

Решение поставленных задач позволит организовать деятельность экологов для сохранения видовой структуры участка, а именно, определять временные промежутки изъятия особей с целью сохранения видовой структуры.

Цель диссертационной работы заключается в разработке методов математического моделирования, численных методов и комплекса программ для построения процесса периодического воздействия на биосообщество участка, реализация которого обеспечит сохранение видовой структуры биосообщества.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Задача математического моделирования процесса ухода популяции мигрирующего вида из местообитания (пункт 1 паспорта специальности 05.13.18).

2. Задача моделирования и анализа динамики периодического внешнего воздействия (периодического изъятия особей популяций) с целью сохранения видовой структуры биосообщества участка (пункты 1, 2 паспорта специальности 05.13.18).

3. Построение алгоритмов для численного нахождения периода траекто-

рии системы Лотки-Вольтерра и периода внешнего воздействия, сохраняющего структуру биосообщества (пункт 3 паспорта специальности 05.13.18).

4. Разработка программного комплекса для реализации метода периодического внешнего воздействия на биосообщество, сохраняющего его видовую структуру (пункт 4 паспорта специальности 05.13.18).

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Предложен критерий ухода популяции из местообитания, основанный на понятии пищевой привлекательности.

2. Разработан метод периодического внешнего воздействия на биосообщество с целью сохранения видовой структуры.

3. Получен численный метод нахождения периода траектории системы Лотки-Вольтерра при внешнем воздействии.

4. Разработан комплекс программ для нахождения периода траектории системы Лотки-Вольтерра; периода внешнего воздействия, сохраняющего структуру биосообщества; временных промежутков изъятия особей, в которые могут быть организованы экспедиции экологов для сохранения видовой структуры биосообщества.

5. Доказана теорема о периодическом решении системы Лотки-Вольтерра при кусочно постоянном периодическом воздействии.

Теоретическая значимость работы состоит в следующем:

1. Предложен подход к моделированию процесса воздействия на биосообщество участка, основанный на косом произведении динамических систем.

2. Доказана теорема о периодическом решении системы Лотки-Вольтерра при кусочно постоянном периодическом воздействии.

3. Разработан численный метод нахождения периода траектории системы Лотки-Вольтерра.

Практическая значимость работы состоит в следующем:

1. Разработаны методы и модели внешнего периодического воздействия, позволяющего сохранить структуру биосообщества участка. Предложенные ме-

тоды позволяют находить моменты начала и окончания изъятия особей, что дает возможность определять временной режим деятельности экологов для сохранения видовой структуры участка.

2. Разработан алгоритм вычисления периода процесса внешнего воздействия, сохраняющего структуру биосообщества. Создан комплекс программ, реализующий этот алгоритм.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод математического моделирования процесса ухода популяции, вызванного недостатком пищевых ресурсов, основанный на понятии пищевой привлекательности местообитания (пункт 1 паспорта специальности 05.13.18).

2. Методы и модели периодического внешнего воздействия, сохраняющего видовую структуру биосообщества (пункт 1 паспорта специальности 05.13.18).

3. Численные методы нахождения периода траектории системы Лотки-Вольтерра и периода процесса внешнего воздействия, сохраняющего видовую структуру биосообщества (пункт 3 паспорта специальности 05.13.18).

4. Комплекс программ для нахождения периода траектории системы Лотки-Вольтерра при внешнем воздействии; периода внешнего воздействия, сохраняющего структуру биосообщества; временных промежутков изъятия особей, в которые могут быть организованы экспедиции экологов для сохранения видовой структуры биосообщества (пункт 4 паспорта специальности 05.13.18).

Часть результатов диссертации получена в рамках исследований, проводимых по гранту РФФИ 18-01-00249a.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих международных научных конференциях и семинарах:

1. VII Петрозаводская международная конференция «Комплексный анализ и его приложения», Ivanova A.S. The control in the Volterra system with migration. 29 июня – 5 июля 2014 г., Урозеро, Республика Карелия, Россия.

2. Международный семинар «Математические модели в теоретической эко-

логии и земледелии» (Полуэктовские чтения), Кириллов А.Н., Иванова А.С. Управление структурой двухвидовой системы «хищник-жертва» с миграцией. 14-16 октября 2014 г., Санкт-Петербург, Россия.

3. Третья международная конференция «Устойчивость и процессы управления», Иванова А.С., Кириллов А.Н. Управляемая динамика в задачах фуражирования. 5–9 октября 2015г., Санкт-Петербург, Россия.

4. XI международная научная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий», Кириллов А.Н., Иванова А.С. Управляемый периодический процесс, сохраняющий видовой состав биосообщества. 19-24 сентября 2018 г., Воронеж, Россия.

5. Международная научная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», Кириллов А.Н., Иванова А.С. Периодическое управление в задаче сохранения состава биосообщества. 24-29 сентября 2018 г., Минск, Республика Беларусь.

6. Шестая Национальная научная конференция с международным участием «Математическое моделирование в экологии», Кириллов А.Н., Иванова А.С. Периодическое управление системой «хищник-жертва». 26-29 сентября 2019 г., Пущино, Россия.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 работах, из которых 3 статьи в изданиях, входящих в Перечень рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации (включая 2 статьи в российских журналах [1,2]; 1 статью в журнале, индексируемом в библиографических базах Web of Science и Scopus [3]), 1 глава в книге [4] и 6 тезисов докладов [5–10]. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [11].

Личный вклад автора. Основные результаты, в представленных публикациях, получены автором диссертационной работы.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, 2 приложений и списка используемой литературы. Общий объем диссертации составляет 184 страницы. Список литературы содержит 122 наименования.

Содержание работы

Во введении обоснованы актуальность, значимость работы; определены цель и задачи исследования; перечислены результаты исследования, в которых состоит новизна, теоретическая и практическая значимость работы; сформулированы основные положения, выносимые на защиту; дано краткое изложение содержания работы по главам.

В первой главе диссертации приведен обзор существующих работ по темам исследований, проводимых в данной работе. Также приводится принцип Э. Чарнова[1], согласно которому популяция уходит из участка, когда время, проведенное популяцией на участке, удовлетворяет некоторому условию. Уход популяции происходит мгновенно, что редко наблюдается в реальных системах. Даже если пищевого ресурса не хватает, популяция остается на участке и покидает его через некоторое время. В связи с этим возникает задача моделирования процесса ухода популяции из участка с учетом реальных процессов в системе.

В работе рассматривается участок, биологическое сообщество которого состоит из двух популяций, а именно, жертв и хищников. Причем популяция жертв не покидает участок, а популяция хищников мигрирует из участка, если на нем недостаточное количество ресурса (жертв). Для описания динамики взаимодействующих популяций используется классическая система Лотки-Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m), \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$ – численности жертв и хищников в момент времени t,

[1] Charnov E.L. Optimal Foraging, the Marginal Value Theorem // Theoretical population biology.–1976.–Vol. 9, № 2.–P.129–136.

соответственно; a, b, k, m – положительные постоянные ($k < 1$).

Далее, решается задача математического моделирования процесса ухода популяции из участка, причем решение этой задачи основанно на понятии пищевой привлекательности участка. Введем это понятие.

Следуя идее Р. Ардити[2], рассматривается функция $w(t) = \frac{x_1(t)}{x_2(t)} - \lambda$, т.е. отклонение относительной величины обеспеченности хищника ресурсом от некоторого порога $\lambda > 0$. Предполагается, что при $w(t) < 0$ проявляется тенденция популяции хищников к миграции и недостаток пищевого ресурса при $w(t) < 0$ должен накапливаться в течение некоторого времени, что приводит к рассмотрению величины $\int\limits_0^t \left(\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda\right) d\tau$. Также, следуя принципу «стада себялюбцев», предложенному У. Гамильтоном[3] для объяснения одновременности миграции особей популяции, предлагается учитывать объем популяции хищников, что приводит к рассмотрению величины $\int\limits_0^t x_2(\tau) \left(\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda\right) d\tau$.

Пищевой привлекательностью участка для популяции хищников $\tilde{n}(t)$ называется сумма[4]:

$$\tilde{n}(t) = \Lambda + \int\limits_0^t x_2(\tau) \left(\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda\right) d\tau, \tag{2}$$

где $0 < \Lambda = \tilde{n}(0)$ – постоянное пороговое значение. Предполагается, что при $\tilde{n}(t) > \Lambda$ популяция хищников остается на участке, а при $\tilde{n}(t) < \Lambda$ – покидает его. Таким образом, критерием ухода популяции хищников из участка в данной работе является пищевая привлекательность участка. Отмечается, что за счет интеграла в выражении для пищевой привлекательности, решение об уходе принимается с учетом предыстории. Другими словами, происходит накопление недостатка пищевого ресурса и когда накопление достигает порогового значе-

[2] Arditi R., Ginzburg L. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence // Journal of Theoretical Biology.–1989.–Vol. 139.–P. 311-326.

[3] Hamilton W. Geometry for the selfish herd // Journal of the Theoretical Biology.–1971.–Vol. 31.–P. 295-311.

[4] Кириллов А.Н. Экологические системы с переменной размерностью // Обозрение прикладной и промышленной математики.–1999.–Т.6,№ 2.–С. 318-336.

ния, популяция покидает участок. В параграфе 1.4 сравнивается условие ухода популяции из участка, основанное на понятии пищевой привлекательности, с условием, предложенным Э. Чарновым[1].

Равенство (2) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2. \tag{3}$$

Объединяя (1) и (3), получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 &= x_2(kbx_1 - m), \\ \dot{\tilde{n}} &= x_1 - \lambda x_2. \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) – косое произведение динамических систем (1) и (3), поэтому качественное и аналитическое исследование системы (4) упрощается. Поскольку в правые части первых двух уравнений системы (4) не входит $\tilde{n}$, то в пространстве $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \tilde{n} \in \mathbb{R}\}$ траектории этой системы располагаются на цилиндрических поверхностях, образующие которых параллельны оси $O\tilde{n}$, направляющие – траектории системы (1).

Внешним воздействием на биосообщество участка называется изъятие особей жертвы и (или) хищника с интенсивностями u_1 и (или) u_2, соответственно.

Система (4) с учетом внешнего воздействия примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(a - bx_2 - u_1), \\ \dot{x}_2 &= x_2(kbx_1 - m - u_2), \\ \dot{\tilde{n}} &= x_1 - \lambda x_2. \end{cases} \tag{5}$$

Решение системы (5), соответствующее внешнему воздействию u_1, u_2, обозначается через $r(t, M_0, u_1, u_2) = (x_1(t, M_0, u_1, u_2), x_2(t, M_0, u_1, u_2), \tilde{n}(t, M_0, u_1, u_2))$, где $r(0, M_0, u_1, u_2) = M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda)$.

Система (1) с учетом внешнего воздействия примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(a - bx_2 - u_1), \\ \dot{x}_2 &= x_2(kbx_1 - m - u_2). \end{cases} \tag{6}$$

Допустимым внешним воздействием называется изъятие особей жертвы и хищника с интенсивностями u_1 и u_2, соответственно, причем u_1 и u_2 – кусочно постоянные функции времени

$$u_1 : \mathbb{R} \to [0, a),$$
$$u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,$$

где $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Для того, чтобы изъятие не приводило к исчезновению жертвы, множество значений функции u_1 – промежуток $[0, a)$.

Точка $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda)$ называется точкой сохранения структуры биосообщества, если найдется такое допустимое внешнее воздействие u_1, u_2, что

$$\tilde{n}(t, M_0, u_1, u_2) \geq \Lambda, \forall t \geq 0. \tag{7}$$

Пусть A – множество точек сохранения структуры биосообщества.

Задача 1. Пусть $M_0 \in A$. Найти допустимое внешнее воздействие u_1, u_2 такое, что

$$\dot{\tilde{n}}(t, M_0, u_1, u_2) \geq 0, \forall t \geq 0. \tag{8}$$

Задача 2. Найти множество таких точек $M_0 \in A$, для которых задача 1 разрешима.

Задача 3. Пусть $M_0 \in A$. Найти допустимое внешнее воздействие u_1, u_2 такое, что неравенство (7) верно при любом $t \geq 0$.

Очевидно, что решение задачи 1 является решением задачи 3.

Вторая глава посвящена решению задач при помощи постоянного допустимого внешнего воздействия. В параграфе 2.2 задачи 1 и 2 решаются с помощью изъятия особей обеих популяций. Так как $\tilde{n}(0, M_0, u_1, u_2) = \Lambda$, то предлагается разбить плоскость $\pi = \{(x_1, x_2, \tilde{n}) : \tilde{n} = \Lambda\}$ на множества:

$$
\begin{aligned}
\Pi &= \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geq \tfrac{m}{bk}, \varepsilon \leq x_2 \leq \tfrac{a}{b}\},\\
K_1 &= \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geq \tfrac{m}{bk}, x_2 > \tfrac{a}{b}\},\\
K_2 &= \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 < \tfrac{m}{bk}, \varepsilon \leq x_2 \leq \tfrac{a}{b}\},\\
K_3 &= \begin{cases} \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 < \tfrac{m}{bk}, x_2 > \tfrac{a}{b}\}, \text{если } \lambda < \tfrac{m}{ak},\\ \emptyset, \text{если } \lambda \geq \tfrac{m}{ak}, \end{cases}\\
\pi^- &= \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 < 0\},\\
l &= \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 = 0\},\\
E &= \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_2 < \varepsilon\},
\end{aligned}
$$

где $0 < \varepsilon$ – достаточно малая постоянная. Итак, $\pi = \Pi \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \pi^- \cup l \cup E$. Доказаны теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda > 0, M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda) \in \Pi$. *Тогда если*

$$
\begin{aligned}
u_1 &= a - bx_{20},\\
u_2 &= bkx_{10} - m,
\end{aligned} \tag{9}
$$

то M_0 *является точкой сохранения структуры биосообщества.*

Теорема 2. *Пусть* $\lambda > 0, M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda) \in K_1$. *Тогда если* u_1, u_2 *такие, что*

$$
\begin{gathered}
u_1 = a - bx_{20} - \lambda \tfrac{x_{20}}{x_{10}}(kbx_{10} - m - u_2),\\
kbx_{10} - m + \tfrac{1}{\lambda}\tfrac{x_{10}}{x_{20}}(bx_{20} - a) \leq u_2 < kbx_{10} - m + \tfrac{bx_{10}}{\lambda},
\end{gathered} \tag{10}
$$

то M_0 *– точка сохранения структуры биосообщества.*

Теорема 3. *Пусть* $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda) \in K_2$. *Тогда если* $\varepsilon > m/(b + bk\lambda)$ *и* u_1, u_2 *такие, что*

$$
\begin{gathered}
u_1 = a - bx_{20} - \lambda \tfrac{x_{20}}{x_{10}}(kbx_{10} - m - u_2),\\
0 \leq u_2 < kbx_{10} - m + \tfrac{bx_{10}}{\lambda},
\end{gathered} \tag{11}
$$

то M_0 *является точкой сохранения структуры биосообщества.*

В параграфе 2.3 задачи 1 и 2 решаются с помощью изъятия особей популяции хищников с постоянной интенсивностью u. Причем, так как уменьшение внешнего воздействия u является приоритетной дополнительной задачей, то в диссертации рассматривается предельный случай – случай касания траектории системы (5) при $(u_1, u_2) = (0, u)$ и плоскости $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 - \lambda x_2 = 0\}$.

Часть результатов второй главы опубликована в работе [3].

В третьей главе решается задача моделирования периодического внешнего воздействия на биосообщество с целью сохранения видовой структуры. Для уменьшения нагрузки на участок и для простоты реализации на практике предлагается чередовать изъятие особей с неизъятием, т.е. интенсивность изъятия становится кусочно постоянной функцией. Вследствие чего, при некоторых условиях был предложен периодический процесс внешнего воздействия.

Предполагается, что в течение промежутка времени длины $\tau > 0$ производится изъятие особей с интенсивностями (9), если $M_0 \in \Pi$, или (10), если $M_0 \in K_1$. По истечении времени τ изъятие прекращается. В параграфе 3.1 изучается дальнейшее поведение траектории системы (5).

Пусть $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda) \in \pi$. Пусть $\tilde{T}(M_0)$ — период решения $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$ системы Лотки–Вольтерра с изъятием особей популяций и $(\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(0)) = (x_{10}, x_{20})$. Пусть $T(M_0)$ – период решения $(x_1(t), x_2(t))$ системы Лотки–Вольтерра без изъятия и $(x_1(\tau), x_2(\tau)) = (x_{10}, x_{20})$. Пусть $\lambda > m/(ak), M_0 \in \pi^+ = \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 > 0\}$, $\mathcal{F} = \{t\colon t \in [\tau, \tau + T(M_0)), x_1(t) - \lambda x_2(t) = 0\}$. Так как траектории системы (1) являются выпуклыми, вложенными друг в друга, и решение имеет период $T(M_0)$, то $\mathcal{F}$ содержит два элемента. Пусть

$$t_1 = \min \mathcal{F} - \tau, \quad t_2 = \max \mathcal{F} - \tau. \tag{12}$$

Полным оборотом точки траектории системы (4) называется отрезок траектории, соответствующий промежутку времени, равному периоду T.

Решение задачи на нахождение величины изменения $\tilde{n}(t)$ Δ на временном промежутке длины T дается леммой.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\Delta = \int_0^T \big(x_1(t) - \lambda x_2(t)\big)dt = \frac{aT}{b}\left(\frac{m}{ak} - \lambda\right). \tag{13}$$

Величину изменения $\tilde{n}(t)$ на временном промежутке длины $\tilde{T}$ обозначим через $\tilde{\Delta}$. В параграфе 3.1 доказаны теоремы.

Теорема 4. *Пусть $\lambda > m/(ak), M_0$ — начальная точка траектории системы (5). Тогда если $M_0 \in K_1$,*

$$u_1 = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u_2 = \begin{cases} kbx_{10} - m + \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{x_{10}}{x_{20}}(bx_{20} - a), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

или $M_0 \in K_2, \varepsilon > m/(b + bk\lambda)$,

$$u_1 = \begin{cases} a - bx_{20} - \lambda\dfrac{x_{20}}{x_{10}}(kbx_{10} - m), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

$$u_2 = 0, \quad t \geq 0,$$

где $\tau = N_0\tilde{T}(M_0), N_0 \in \mathbb{N}$, то количество полных оборотов, которые совершит точка траектории системы (5), начиная с момента времени τ, до попадания на плоскость π, равно $N + 1$, где

$$N = \left[\frac{H + \int\limits_{\tau}^{\tau+t_2}\big(x_1(t) - \lambda x_2(t)\big)dt}{|\Delta|}\right], \tag{14}$$

где $[\,\cdot\,]$ — символ целой части числа, $H = N_0\tilde{\Delta}$, $\tilde{\Delta} = \frac{(a-u_1)\tilde{T}}{b}\left(\frac{m+u_2}{(a-u_1)k} - \lambda\right)$, t_2 определено в (12), Δ вычисляется по формуле (13).

Теорема 5. *Пусть $\lambda > m/(ak), \Pi \ni M_0$ — начальная точка траектории системы (5),*

$$u_1 = \begin{cases} a - bx_{20}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} bkx_{10} - m, & 0 \le t \le \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

где $0 < \tau$ – некоторая постоянная. Тогда количество полных оборотов, которые совершит точка траектории системы (5), начиная с момента времени τ, до попадания на плоскость π, равно $N+1$, где N определено в (14), причем $H = (x_{10} - \lambda x_{20})\tau$, t_2 определено в (12), Δ вычисляется по формуле (13).

С учетом теорем 4,5 в параграфе 3.2 строятся процессы внешнего воздействия, сохраняющие структуру биосообщества, в которых изъятие особей чередуется с неизъятием.

Пусть $\lambda > \frac{m}{ak}$, $M_0 \in \Pi$, $\tau > 0$, $D = (N+1)|\Delta|/(x_{10} - \lambda x_{20})$, N определено в теореме 5, $n = 1, 2, \ldots$.

Будем полагать:

при $0 \le t \le \tau$

$$u_1 = a - bx_{20}, u_2 = bkx_{10} - m;$$

при $\tau + (n-1)(N+1)T(M_0) + (n-1)D < t < \tau + n(N+1)T(M_0) + (n-1)D$

$$u_1 = 0, u_2 = 0; \tag{15}$$

при $\tau + n(N+1)T(M_0) + (n-1)D \le t \le \tau + n(N+1)T(M_0) + nD$

$$u_1 = a - bx_{20}, u_2 = bkx_{10} - m. \tag{16}$$

Заметим, что $u_1(t), u_2(t)$ периодичны и их период равен

$$\mathcal{T} = (N+1)T(M_0) + D. \tag{17}$$

Теорема 6. *Пусть $M_0 \in \Pi$, в зависимости от t $u_1(t), u_2(t)$ имеют вид (15) или (16). Тогда $\tilde{n}(t, M_0, u_1, u_2) \ge \Lambda, \forall t \ge 0$, и решение системы (5) имеет период $\mathcal{T}$.*

Пусть $\lambda > \frac{m}{ak}$, $M_0 \in K_1$ и в течение времени $\tau = N_0\tilde{T}(M_0)$, где $N_0 \in \mathbb{N}$, $u_1(t), u_2(t)$ имеют вид

$$u_1 = 0, u_2 = kbx_{10} - m + x_{10}(bx_{20} - a)/(\lambda x_{20}). \tag{18}$$

Из теоремы 4 следует, что начиная с момента τ до попадания на плоскость π, при

$$u_1 = u_2 = 0 \tag{19}$$

точка траектории системы (5) совершит $N_1 + 1$ полных оборотов, где N_1 вычисляется по формуле (14). Таким образом, при $t \in [0, \tau + (N_1 + 1)T(M_0))$ $\tilde{n}(t, M_0, u_1, u_2) \geq \Lambda$.

Внешнее воздействие на биосообщество с интенсивностями u_1, u_2 вида (18), (19) при $t \in [0, \tau + (N_1 + 1)T(M_0))$ будем называть первой стадией внешнего воздействия. Другими словами, первая стадия – это чередование изъятия с интенсивностью (18) на промежутке $[0, \tau]$ с неизъятием (19) на промежутке $(\tau, \tau + (N_1 + 1)T(M_0))$.

i-ой стадией процесса внешнего воздействия называется изъятие особей с интенсивностями

$$u_1 = 0, u_2 = kbx_{10} - m + x_{10}(bx_{20} - a)/(\lambda x_{20}) \tag{20}$$

на временном промежутке $(i-1)\tau + \sum_{j=1}^{i-1}(N_j+1)T(M_0) \leq t \leq i\tau + \sum_{j=1}^{i-1}(N_j+1)T(M_0)$ и неизъятие

$$u_1 = u_2 = 0 \tag{21}$$

на временном промежутке $i\tau + \sum_{j=1}^{i-1}(N_j + 1)T(M_0) < t < i\tau + \sum_{j=1}^{i}(N_j + 1)T(M_0)$. Последовательный переход от i-ой стадии к $(i + 1)$-ой, $i = 1, 2, 3, ...$, образует процесс внешнего воздействия, сохраняющий структуру биосообщества.

Введем обозначение:

$$h = \int\limits_0^{T(M_0)+t_1-t_2} (x_1(t) - \lambda x_2(t))dt, \tag{22}$$

где $(x_1(0), x_2(0))$ — точка пересечения прямой l и траектории системы (1), имеющая меньшие координаты.

Теорема 7. *Пусть $M_0 \in K_1, \lambda > m/(ak), t \geq 0$, в зависимости от t $u_1(t), u_2(t)$ имеют вид (20) или (21). Тогда $\Lambda \leq \tilde{n} < \Lambda + |\Delta| + h + N_0\tilde{\Delta}, \forall t \geq 0$.*

Аналогичным образом, используя теорему 4, можно описать процесс внешнего воздействия, сохраняющий структуру биосообщества, для $M_0 \in K_2$.

В параграфе 3.3 исследуется вопрос о существовании периодического процесса в случае $M_0 \in K_1$. Для удобства, вместо $|\Delta|$ используется обозначение Δ.

Пусть $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f(x) = x + N_0\tilde{\Delta}$, где $N_0, \tilde{\Delta}$ определены ранее, $x \in [h, h+\Delta)$, h вычисляется по формуле (22). Функция f соответствует промежутку времени, на котором

$$u_1 = 0, u_2 = kbx_{10} - m + x_{10}(bx_{20} - a)/(\lambda x_{20}).$$

Положим, не умаляя общности дальнейших рассуждений, $h = 0$ (можно сделать сдвиг $x \to x - h$). Тогда $f([0, \Delta)) = [N_0\tilde{\Delta}, \Delta + N_0\tilde{\Delta})$. Поскольку длина последнего промежутка равна Δ, то существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $k\Delta \in [N_0\tilde{\Delta}, \Delta + N_0\tilde{\Delta})$, где $k = \left[\frac{N_0\tilde{\Delta}+\Delta}{\Delta}\right] = 1 + \left[\frac{N_0\tilde{\Delta}}{\Delta}\right]$, где $[\cdot]$ — символ целой части числа. Пусть $c = f^{-1}(k\Delta) = k\Delta - N_0\tilde{\Delta} \in [0, \Delta)$. Рассмотрим отображение $g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$

$$g(y) = \begin{cases} y - (k-1)\Delta, & \text{если } f^{-1}(y) < c, \\ y - k\Delta, & \text{если } f^{-1}(y) \geq c. \end{cases}$$

Отображение g соответствует временному промежутку нулевого воздействия процесса, построенного для $M_0 \in K_1$.

Введем отображение $G : [0, \Delta) \to [0, \Delta)$

$$G(x) = g(f(x)) = \begin{cases} f(x) - (k-1)\Delta, & \text{если } x < c, \\ f(x) - k\Delta, & \text{если } x \geq c. \end{cases}$$

Учитывая, что $f(x) = x + N_0\tilde{\Delta}$, получаем

$$G(x) = \begin{cases} x + \gamma, & \text{если } x < c, \\ x + \gamma - \Delta, & \text{если } x \geq c, \end{cases} \tag{23}$$

где $\gamma = (N_0\alpha - (k-1))\Delta$, $\alpha = \frac{\tilde{\Delta}}{\Delta}$. Отображение G определяет гомеоморфизм $\tilde{G}$ окружности $S^1 = \mathbb{R}/\Delta\mathbb{Z}$, $\tilde{G} : S^1 \to S^1$.

Таким образом, процесс внешнего воздействия, построенный для решения задачи сохранения видовой структуры сообщества, в случае $M_0 \in K_1$, порождает дискретную динамическую систему, задаваемую отображением $\tilde{G} : S^1 \to S^1$. Пусть $\beta = \frac{2\pi N_0\tilde{\Delta}}{\Delta}$. Доказано утверждение.

Утверждение 1. *Гомеоморфизм $\tilde{G} : S^1 \to S^1$, определяемый отображением G (23), является поворотом точек окружности S^1 на угол β.*

Пусть $\{\tilde{G}^n(x), n \in \mathbb{Z}, x \in S^1\} = \tilde{r}(x)$ – траектория точки $x \in S^1$, порожденная отображением $\tilde{G}$.

Теорема 8. *Если $\frac{\tilde{\Delta}}{\Delta} \in \mathbb{Q}$, то траектория $\tilde{r}(x)$ периодична для $\forall x \in S^1$. Если $\frac{\tilde{\Delta}}{\Delta} \notin \mathbb{Q}$, то $\tilde{r}(x)$ плотна в S^1.*

Отметим, что теорема 8, теорема о периодическом решении системы Лотки-Вольтерра при кусочно постоянном периодическом воздействии, является развитием теоремы, доказанной в работе[5]. А именно, в работе[5] доказана периодичность решения двумерной системы Лотки-Вольтерра при непрерывно дифференцируемой интенсивности изъятия особей, в данной же работе доказана периодичность решения трехмерной системы (5) при кусочно постоянной интенсивности изъятия особей.

Часть результатов третьей главы опубликована в работе [2].

[5] Hausrath A., Manasevich R. Periodic solutions of periodically harvested Lotka-Volterra systems // Revista Colombiana de Matematicas.–1987.–Vol.21.–P.337-346.

Четвертая глава посвящена построению алгоритмов и комплекса программ для численного нахождения периода траектории системы Лотки-Вольтерра; периода внешнего воздействия, сохраняющего видовую структуру биосообщества; временных промежутков изъятия особей, в которые могут быть организованы экспедиции экологов для сохранения видовой структуры биосообщества.

Опишем численный метод нахождения периода траектории системы Лотки-Вольтерра, предложенный в диссертации. Уравнение траектории системы (1), проходящей через точку $M_0(x_{10}, x_{20})$, имеет вид[6]

$$F(x_1, x_2) = a \ln x_2 - bx_2 + m \ln x_1 - kbx_1 - c = 0, \tag{24}$$

где $c = c(x_{10}, x_{20}) = a \ln x_{20} - bx_{20} + m \ln x_{10} - kbx_{10}$.

Пусть $T(M_0)$ – период траектории системы (1), проходящей через точку M_0. В диссертации рассматривается разбиение траектории системы (1), проходящей через точку M_0, точками A, B, C, D на четыре дуги $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DA}$. Точки A, D – точки пересечения траектории системы (1) и прямой $x_1 = \frac{x_{1min}+\frac{m}{bk}}{2}$, причем A имеет меньшую ординату; B, C – точки пересечения траектории системы (1) и прямой $x_1 = \frac{x_{1max}+\frac{m}{bk}}{2}$, причем B имеет меньшую ординату; $x_{1min} = \min\{x_1(t) : 0 \le t < T(M_0)\}$, $x_{1max} = \max\{x_1(t) : 0 \le t < T(M_0)\}$, где $(x_1(t), x_2(t))$ – решение системы (1), причем $(x_1(0), x_2(0)) = M_0$.

Пусть $x_{one} = \frac{x_{1min}+\frac{m}{bk}}{2}$; $x_{two} = \frac{x_{1max}+\frac{m}{bk}}{2}$; x_{11} и x_{12} – ординаты точек A и D, соответственно; x_{21}, x_{22} – ординаты точек B и C, соответственно. Из теоремы о неявной функции следует, что при $x_1 \in [x_{one}, x_{two}]$ существуют единственные непрерывные функции $x_2 = \tilde{x}_2(x_1) < \frac{a}{b}$ и $x_2 = \tilde{\tilde{x}}_2(x_1) > \frac{a}{b}$, которые являются решениями уравнения (24). Аналогично при $x_2 \in [x_{11}, x_{12}]$ и $x_2 \in [x_{21}, x_{22}]$ существуют единственные непрерывные функции $x_1 = \tilde{x}_1(x_2) < \frac{m}{bk}$ и $x_1 = \tilde{\tilde{x}}_1(x_2) > \frac{m}{bk}$, соответственно, являющиеся решениями уравнения (24).

[6] Леонов Г.А. Введение в теорию управления.–СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004.–218 с.

Пусть

$$S_1 = \int\limits_{x_{one}}^{x_{two}} \frac{dx_1}{x_1(a - b\tilde{x}_2(x_1))}, S_2 = \int\limits_{x_{one}}^{x_{two}} \frac{dx_1}{x_1(a - b\tilde{\tilde{x}}_2(x_1))},$$

$$S_3 = \int\limits_{x_{21}}^{x_{22}} \frac{dx_2}{x_2(kb\tilde{\tilde{x}}_1(x_2) - m)}, S_4 = \int\limits_{x_{11}}^{x_{12}} \frac{dx_2}{x_2(kb\tilde{x}_1(x_2) - m)}.$$

Теорема 9. *Период траектории системы (1), проходящей через точку M_0, равен*

$$T(M_0) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4.$$

Данный метод нахождения $T(M_0)$ отличается от методов, описанных в работе[7]. Оригинальным является и численный метод нахождения интегралов S_1, S_2, S_3, S_4. Эти интегралы вычисляются с помощью метода трапеций, причем поскольку подынтегральные функции содержат неявно заданную функцию $x_1(x_2)$ или $x_2(x_1)$, то для вычисления значения x_1 или x_2 при фиксированном значении x_2 или x_1, соответственно, применяется метод хорд для решения уравнения (24). Таким образом, численный метод нахождения $T(M_0)$ представляет собой комбинацию двух численных методов – трапеций и хорд. В параграфе 4.1 диссертации построен алгоритм 1, предназначенный для вычисления $T(M_0)$.

В параграфе 4.3 построен алгоритм 2, предназначенный для вычисления периода процесса внешнего воздействия $\mathcal{T}$ (17).

Для реализации алгоритмов 1 и 2 на языке программирования «Фортран» написан комплекс программ, с помощью которого производится расчет периода траектории системы Лотки-Вольтерра; периода процесса внешнего воздействия, сохраняющего видовую структуру биосообщества; временных промежутков изъятия особей, в которые могут быть организованы экспедиции экологов

[7] Shih S.-D. The period of a Lotka-Volterra system // Taiwanese journal of mathematics.–1997.–Vol. 1, № 4.–P. 451-470.

для сохранения видовой структуры биосообщества. Приведены численные результаты, полученные при реализации комплекса программ, и их анализ.

Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [11], листинг которой приведен в приложении А диссертации.

Заключение

В диссертации предложен метод математического моделирования процесса ухода популяции из участка, вызванного недостатком пищевых ресурсов, основанный на понятии пищевой привлекательности участка.

Решена задача сохранения структуры биосообщества участка с помощью постоянных воздействий на биосообщество.

Главным результатом работы является разработка методов и моделей периодического внешнего воздействия, сохраняющего видовую структуру биосообщества. Доказана теорема о периодическом решении системы Лотки-Вольтерра при кусочно постоянном периодическом воздействии.

Предложены численные методы нахождения периода траектории системы Лотки-Вольтерра и периода внешнего воздействия, сохраняющего видовую структуру биосообщества. Разработан комплекс программ, реализующий эти методы. Также с помощью комплекса программ рассчитываются временные промежутки изъятия особей, в которые могут быть организованы экспедиции экологов для сохранения видовой структуры биосообщества.

Список публикаций

В изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Иванова А., Кириллов А. Равновесие и управление в задаче сохранения видового состава биосообщества // Управление большими системами: сборник трудов. — 2015. — № 55. — С. 239–258. **(ВАК)**
2. Кириллов А., Иванова А. Периодический и квазипериодический процессы управления в задаче сохранения видового состава биосообщества // Труды Карельского научного центра РАН. — 2015. — № 10. — С. 99–106. **(ВАК)**
3. Ivanova A., Kirillov A. Equilibrium and control in the biocommunity species composition preservation problem // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78, no. 8. — P. 1500–1511. **(Web of Science, Scopus)**

В других изданиях:

4. Ivanova A., Kirillov A. Chapter 7. Equilibrium and control in biocommunity species composition preserving problem. — NY: Nova Science Publishers, 2015. — Vol. 17: Game-Theoretic Models in Mathematical Ecology. — P. 95–112.
5. Ivanova A. The control in the Volterra system with migration // Комплексный анализ и его приложения: материалы VII Петрозаводской международной конференции (29 июня – 5 июля 2014 г.) / Под ред. В.В. Старкова. — Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2014. — С. 60–61.
6. Иванова А., Кириллов А. Управление структурой двухвидовой системы хищник-жертва с миграцией // Математические модели в теоретической экологии и земледелии. Материалы докладов международного семинара (Полуэктовские чтения). — Санкт-Петербург : Агрофизический НИИ РАСХН, 2014. — С. 84–87.
7. Иванова А., Кириллов А. Управляемая динамика в задачах фуражирования // Материалы 3-й международной конференции «Устойчивость и процессы

управления». 5–9 октября 2015 г. — Санкт-Петербург : Издательский Дом Федоровой Г.В., 2015. — С. 473–474.

8. Кириллов А., Иванова А. Управляемый периодический процесс, сохраняющий видовой состав биосообщества // Сборник трудов XI международной научной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ – 2018)», Воронеж, 19 – 24 сентября 2018 г. / Под ред. А.П. Жабко, И.Л. Батаронова, В.В. Провоторова. – Воронеж : Издательство «Научная книга», 2018. — С. 131–133.
9. Кириллов А., Иванова А. Периодическое управление в задаче сохранения состава биосообщества // Материалы Международной научной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», Минск, 24–29 сентября 2018 г. — Минск : БГУ, 2018. — С. 119–120.
10. Кириллов А., Иванова А. Периодическое управление системой «хищник-жертва» // Материалы Шестой Национальной научной конференции с международным участием «Математическое моделирование в экологии», Пущино, 26–29 сентября 2019 г. / Под ред. П.Я. Грабарника, Д.О. Логофета. — Пущино : ФИЦ ПНЦБИ РАН, 2019. — С. 91–92.

Свидетельство о регистрации программы:

11. Иванова А. Программа для ЭВМ «Вычисление периода системы Лотки-Вольтерра». — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020612430 от 21.02.2020.