

На правах рукописи

Ширяев Александр Александрович

**Аналитическое исследование реализации неустойчивости
заряженной капли во внешних электростатических полях**

Специальность 01.02.05 –
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Ярославль – 2020 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова» в учебно-научной лаборатории математического моделирования физических процессов.

Научный руководитель: **Григорьев Александр Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, заведующий учебно-научной лаборатории математического моделирования физических процессов

Официальные оппоненты: **Бычков Владимир Львович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Московский Государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет.

Бухаров Александр Васильевич
доктор технических наук, ведущий научный сотрудник. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Национальный исследовательский университет "МЭИ".

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук»

Защита состоится "19" марта 2020 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при ИПМех РАН по адресу: 119526, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН и на сайте: <http://ipmnet.ru>

Автореферат разослан «__» _____ 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.240.01
к.ф.-м.н.

Е.Я. Сысоева

Общая характеристика работы

Актуальность темы и объект исследования. Исследование гидродинамической неустойчивости капиллярных осцилляций заряженных капель, находящихся во внешних электростатических полях и закономерностей реализации их неустойчивости актуально в связи с многочисленными технологическими и техническими приложениями капиллярного распада жидкостей. Так, в жидкостной масс-спектрометрии и в термоядерном синтезе электрогидродинамическая неустойчивость поверхности заряженной капли используется для создания высоко заряженных капельных пучков трудно летучих веществ. Также капиллярный распад заряженных капель применяется в жидкометаллических источниках ионов, в ионных реактивных двигателях космической техники, для создания электрических аэрозолей и рассеяния оптически плотных аэродисперсных систем, для повышения качества атомизации горюче-смазочных материалов. Капли, подверженные воздействию внешних электрических полей используются для технических применений диспергирования жидкостей, таких как каплеструйная печать, распыление сельскохозяйственных аэрозолей, лаков и красок, а также генерации капель для эффективной работы электростатических осадителей. Электроэмульсификация жидкостей применяется в гомогенизаторах, используемых в пищевой, фармацевтической и химической промышленности. В биотехнологии при диспергировании отдельные молекулярные структуры могут инкапсулироваться жидкостью и затем направляться электрическим полем.

Гидродинамическая неустойчивость заряженных капель и явление их распада используется для толкования атмосферных явлений на основе подходов механики жидкости и представляет интерес в области изучения механизмов разделения зарядов в грозовых облаках и перемещения и рекомбинации зарядов вблизи разрядов молний.

Долгое время в работах по механике жидкости исследовались капиллярные осцилляции и их устойчивость на поверхности капель, находящихся в однородном электростатическом поле. Исследования показали, что в некоторых ситуациях заряженные капли намного быстрее распадаются в присутствии внешнего электрического поля. Так как форма поля существенно влияет на условия распада капли, возникает необходимость системного анализа устойчивости такой капли. Необходимость анализа поведения и электрогидродинамической устойчивости заряженных капель в неоднородных электрических полях возникла после начала использования квадрупольных ловушек для стабилизации капли. В дальнейшем неоднородные электрические поля стали применяться для совершенствования методик контролируемого получения заряженных жидких частиц. Теоретические методы механики

сплошной среды использовались для анализа электрогидродинамической устойчивости заряженной капли в простейших конфигурациях внешнего электростатического поля – однородного и квадрупольного. Эксперименты, проведенные J.G. Kim, S.Mhatre и R.Thaoкар показали интерес к практическому применению неоднородных электростатических полей для реализации электрогидродинамической неустойчивости заряженной капли. Теоретический анализ устойчивости таких капель способствует развитию как экспериментальных исследований, так и прикладных областей, связанных с электродиспергированием и жидкокапельными ионами. Стоит отметить, что исследования осцилляций и неустойчивости поверхности жидкости не ограничиваются рассмотрением капель, и работы по данной тематике активно ведутся до сих пор. Так, неустойчивость осцилляций свободной поверхности жидкости, исследовалась теоретически и экспериментально В.А. Калиниченко и А.В. Кравцовым. Экспериментальные исследования электрогидродинамической неустойчивости жидкости проведены В.Л. Бычковым, а неустойчивость заряженной жидкости в электрических полях исследовалась теоретически С.В. Нестеровым. Отметим также, что осцилляции, динамика распада капель под воздействием различных факторов и сопутствующие эффекты экспериментально исследуются Чашечкиным Ю.Д., а также Рожковым А.Н. и другими. Теоретический анализ самого процесса развития неустойчивости поверхности жидкости связан с решением сильно нелинейных задач. Здесь стоит отметить аналитические решения, полученные Н.М. Зубаревым, описывающие процесс развития электрогидродинамической неустойчивости и формирования эмиссионных конусов на свободной поверхности жидкости.

1. Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Тема настоящей диссертационной работы соответствует паспорту специальности 01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы», а именно соответствует области исследований, указанных в пункте №13 «Гидродинамическая устойчивость», в пункте № 14 «Линейные и нелинейные (стоячие) волны в жидкостях», в пункте № 16 «Гидромеханика сред, взаимодействующих с электромагнитным полем (внешнее электростатическое поле)», в пункте № 18 «Аналитические, асимптотические методы исследования уравнений континуальных моделей однородных сред (методы прямого моделирования)». Данная диссертационная работа соответствует формуле научной специальности: изучение на основе идей и подходов механики сплошной среды процессов и явлений, сопровождающих течения однородных сред при механических, тепловых и электромагнитных воздействиях; исследование математических моделей для описания параметров потоков движущихся

сред (осцилляций заряженных капель) с целью контроля технологических процессов и прогнозирования природных явлений.

Предметом исследования являются капиллярные осцилляции заряженных капель идеальной жидкости в однородном и неоднородных электростатических полях и устойчивость таких объектов на основе идей и подходов электрогидродинамики.

Целью данного диссертационного исследования является исследование электрогидродинамической устойчивости капиллярных осцилляций заряженных капель во внешнем однородном и неоднородных электростатических полях различных конфигураций.

Для достижения заданной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Построить электрогидродинамическую математическую модель капиллярных осцилляций заряженной капли во внешних однородном и неоднородных электростатических полях различных конфигураций и аналитическим путем обчислить ее.

2. Исследовать равновесные формы заряженной капли во внешних однородном и неоднородных электростатических полях различных конфигураций.

3. Исследовать спектры гармоник, возбуждающихся в заряженной капле за счет взаимодействия с выделенной гармоникой, в зависимости от степени неоднородности внешнего электростатического поля.

4. Найти критические условия реализации электрогидродинамической неустойчивости фиксированной гармоникой осцилляций заряженной капли во внешних электростатических полях в зависимости от номера гармоник.

5. Исследовать влияние степени неоднородности внешнего электростатического поля на критические условия реализации неустойчивости осцилляций произвольной гармоникой.

6. Изучить влияние геометрических размеров стержня, создающего внешнее неоднородное электростатическое поле при подаче на него электрического потенциала, на критические условия реализации электрогидродинамической неустойчивости заряженной капли.

Научная новизна.

1. Аналитическим асимптотическим методом в рамках электрогидродинамики выполнено исследование закономерностей устойчивости капиллярного волнового движения на поверхности заряженной проводящей капли во внешних однородном и неоднородных электростатических полях.

2. С использованием классической модели электрогидродинамики идеальной жидкости получены аналитические выражения равновесной формы заряженной проводящей капли в

неоднородных осесимметричных электростатических полях различных конфигураций.

3. В рамках механики сплошной среды с использованием теоретического аналитического подхода обнаружено, что с увеличением номера гармоники осцилляций критические для реализации гидродинамической неустойчивости значения зарядовый или полевой параметр монотонно повышаются и стремятся к некоторым постоянным значениям.

4. Показано, что критические условия реализации неустойчивости заряженной капли снижаются по мере увеличения степени неоднородности внешнего электростатического поля.

5. Из полученных в работе аналитических зависимостей установлено, что во внешнем электростатическом поле возбуждаются осцилляции гармоник, связанных линейным взаимодействием с выделенной гармоникой.

6. Установлено, что при потере устойчивости некоторой гармоникой осцилляций, одновременно с ней теряет устойчивость весь спектр связанных с ней гармоник, даже если критические условия реализации электростатической неустойчивости выполняются не для всех связанных взаимодействием гармоник.

7. Показано, что снижение критических условий реализации электростатической неустойчивости заряженной капли в поле проводящего стержня, поддерживаемого при постоянном электростатическом потенциале зависят от геометрии стержня.

Практическая значимость.

Результаты теоретического анализа устойчивости капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли, находящейся во внешнем электростатическом поле, представляют практический интерес в процессах электродиспергирования, электроэмульсификации и могут быть использованы при совершенствовании оборудования для масс-спектрометрии, жидкокапельной печати и коллоидных реактивных двигателей. Полученные закономерности распада аэрозольных капель применимы также и для развития теории грозowego электричества.

Методология и методы исследования. Аналитическое исследование закономерностей реализации и устойчивости капиллярного волнового движения поверхности осциллирующих в однородном и неоднородных электростатических полях заряженных капель проведено в рамках методов механики сплошной среды, электрогидродинамики, гидродинамики. Используются аналитические асимптотические методы математического моделирования.

Научные положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Электрогидродинамическая модель неустойчивости капиллярных осцилляций идеально проводящей заряженной во внешних

однородных и неоднородных электрических полях различных конфигураций: поля точечного заряда, точечного диполя, тонкого стержня, и стержня конечной толщины.

2. Дисперсионное соотношение для капиллярных волн и аналитические решения для амплитуд отдельных гармоник осцилляций на начальной стадии развития электрокапиллярной неустойчивости.

3. Выражения для равновесных форм заряженных капель, находящихся во внешних неоднородных электрических полях полученные аналитическими методами в рамках электрогидродинамики.

4. Аналитические зависимости критических условий реализации неустойчивости поверхности заряженных капель в зависимости от напряжённости внешнего поля и заряда капли в рассмотренных электростатических полях различных конфигураций.

5. Исследование влияния степени неоднородности электростатического поля на критические для реализации неустойчивости n -й гармоники осцилляций заряженной капли значения полевого и зарядового параметров, стремящихся к постоянным пределам при $n \rightarrow \infty$.

6. Исследование влияния геометрии стержня, создающего электростатическое поле в окрестности заряженной капли при подаче на него электростатического потенциала на устойчивость капиллярных осцилляций этой капли.

Степень достоверности. Полученные результаты являются достоверными, так как обусловлены использованием строгих математических моделей, соответствующих классическим представлениям механики сплошной среды, электрогидродинамики, математической физики и согласуются с экспериментальными данными других авторов.

Апробация результатов. Результаты настоящей работы докладывались и обсуждались на: «Всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием». (Ярославль, ЯГТУ, 2014, 2016); Международных молодежных научно-практических конференциях «Путь в науку», секция «Физика. Электрогидродинамика» (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019); «Математика и естественные науки. Теория и практика.» (Ярославль ЯГТУ, 2016г); XI Международной научной конференции «Волновая электрогидродинамика проводящей жидкости. Долгоживущие плазменные образования и малоизученные формы естественных электрических разрядов в атмосфере» (Ярославль, ЯрГУ им П.Г. Демидова, 2015, 2019); Международных молодежных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014, 2015, 2016, 2017, 2019); XIV Всероссийской школе-семинаре «Волновые явления в неоднородных средах» имени профессора А.П. Сухорукова («Волны-2014») (Можайск, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014); «Четвёртая

Всероссийская конференция «Глобальная электрическая цепь» (Борок, Геофизическая обсерватория «Борок» – филиал Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, 2019).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 11 работах, из них 6 статей – в рецензируемых журналах, входящих в список изданий, рекомендованных ВАК или индексируемых базами данных Web of Science и Scopus. Список работ приведен в конце автореферата.

Личный вклад автора. Ширяев А.А. принимал участие во всех стадиях подготовки публикаций. В работах [1-6] подробное проведение аналитических расчетов, включая получение дисперсионных соотношений и критических условий реализации неустойчивости заряженной капли, а также анализ полученных результатов выполнены автором лично. Определение направлений исследований, постановка задач и оформление публикаций выполнены совместно с научным руководителем.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, раздела «Результаты и выводы», списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 215 страниц, в том числе 66 рисунков и 4 таблицы. Список литературы состоит из 132 наименований, включая работы диссертанта по теме исследования.

Основное содержание диссертационной работы

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы. Обозначены объект и предмет исследования, научная новизна, практическая значимость диссертации, методология и методы исследования. Перечислены научные положения и результаты, выносимые на защиту. Приведены данные по апробации результатов работы и их степени достоверности. Дана информация о публикациях результатов исследований. Описаны структура и объем диссертации.

В первой главе представлен обзор научной литературы по современному состоянию исследуемой проблемы. Рассмотрено историческое развитие поставленной проблемы, определены основные направления, теоретические подходы и методы исследования диссертационной работы.

Вторая глава посвящена аналитическому асимптотическому исследованию в рамках идей и подходов механики сплошной среды в первом порядке малости по безразмерной амплитуде осцилляций заряженной поверхности капли в электростатических полях простых конфигураций: однородном, поле точечного заряда и диполя.

В разделе 2.1 на основе идей и подходов механики сплошной среды в рамках электрогидродинамики рассматривается задача о расчете капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли (с собственным зарядом Q) радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с массовой плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ , находящейся во внешнем однородном электростатическом поле напряжённостью \vec{E}_0 . Задача рассматривается в сферических координатах $\{r, \theta, \varphi\}$, связанных с центром масс капли. Вектор напряжённости \vec{E}_0 направлен параллельно оси, от которой отсчитывается угол θ . Данная система является неинерциальной, сила инерции в которой связана со взаимодействием заряда капли с внешним электрическим полем. Отметим, что смещением капли под воздействием этой силы можно пренебречь, т.к. в задаче рассматриваются времена порядка характерного времени распада капли, и смещение капли за такое время существенно меньше её радиуса.

Математическая постановка задачи состоит из основных уравнений механики несжимаемой жидкости, а именно уравнения Эйлера и уравнения неразрывности поля скоростей $\vec{V}(\vec{r}, t)$ жидкости:

$$\frac{d\vec{V}(\vec{r}, t)}{dt} + (\vec{V}, \nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P(\vec{r}, t) + \vec{F}_{in};; \quad \text{div}\vec{V}(\vec{r}, t) = 0;$$

где $P(\vec{r}, t)$ - гидродинамическое давление в жидкости. \vec{F}_{in} - сила инерции, действующая на заряженную каплю в однородном электростатическом поле в окрестности поверхности капли определяемым выражением:

$$\text{div}\vec{E}(\vec{r}, t) = 0;$$

Электрический потенциал $\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_{ex}(\vec{r}, t) + \Phi_d(\vec{r}, t)$ в окрестности капли состоит из потенциала внешнего по отношению к капле однородного электростатического поля $\Phi_{ex}(\vec{r}, t) = -E_0 r \cos \theta$ и поля, создаваемого зарядом, расположенным на поверхности капли $\Phi_d(\vec{r}, t)$. Здесь и далее E_0 - проекция вектора напряжённости на направление $\theta = 0$.

Система уравнений, определяющая векторные поля скоростей в жидкости и напряжённости электростатического поля дополняется естественными граничными условиями ограниченности поля скоростей в начале координат и убывания напряженности поля, создаваемого каплей на бесконечности:

$$r \rightarrow 0: \quad \vec{V}(\vec{r}, t) \rightarrow const; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi_d(\vec{r}, t) \rightarrow const;$$

Форма поверхности капли представляется в виде суммы равновесной поверхности капли $r(\theta)$ и капиллярного возмущения $\xi(\theta, t)$ её поверхности и в сферических координатах описывается функцией $F(r, \theta, t) \equiv r - R - r(\theta) - \xi(\theta, t) = 0$.

На поверхности капли формулируется система классических для гидродинамики граничных условий: кинематического, электрического и динамического:

$$F(r, \theta, t) = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla)F = 0; \quad \Phi(\vec{r}, t) = const;$$

$$P - P_{atm} + \vec{E}^2 / 8\pi - \sigma \operatorname{div} \vec{n} = 0; \quad \vec{n} = \nabla F / |\nabla F|;$$

где P_{atm} - давление внешней по отношению к капле среды.

Постановка дополняется интегральными условиями, характеризующими свойства сохранения объёма капли, неподвижности её центра масс и сохранения полного заряда капли:

$$\int_V dV = \frac{4}{3}\pi R^3; \quad \int_V \vec{r} dV = 0; \quad V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}, \vec{E}) dS = Q; \quad S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi].$$

В задаче использована модель потенциального движения жидкости в рамках которого поле скоростей $\vec{V}(\vec{r}, t) = \nabla \psi(\vec{r}, t)$ определяется гидродинамическим потенциалом $\psi(\vec{r}, t)$. Скаляризация задачи производится стандартными методами с переходом к гидродинамическому и электрическому потенциалам.

Задача решалась аналитическим асимптотически путем разложения неизвестных функций по малому параметру ε , в качестве которого выступает отношение амплитуды осцилляций к радиусу капли $\varepsilon \equiv |\xi(\theta, t)| / R \ll 1$, в линейном приближении. Использовалась безразмерная постановка, в которой $R = \rho = \sigma = 1$, а остальные величины выражены в долях своих характерных масштабов. За безразмерными величинами сохранены те же обозначения. Далее по тексту все формулы по умолчанию будут приведены в указанных безразмерных переменных.

Равновесная форма такой капли будет описываться выражением (в линейном по квадрату эксцентриситета приближении):

$$r(\theta) = 1 + h(\theta) = 1 + 3 \frac{w}{(1-W)} P_2(\mu); \quad \mu \equiv \cos \theta;$$

где $W \equiv Q^2 / 16\pi$, $w \equiv E_0^2 / 16\pi$ зарядовый и полевой параметры соответственно.

В ходе решения задачи получено дисперсионное уравнение на собственные частоты ω_n осцилляций n -й гармоники:

$$\omega_n^2 = n(n-1)(2+n-4W) - wC_\omega;$$

$$C_{\omega} = \frac{3}{1-W} \left((n^2 + n - 2 + 4W) Y_{2,n,n} + 8n(1-W) - 12n^2(1-W) U_{1,n-1,n} U_{1,n,n-1} - \right. \\ \left. - 12n(2+n)(1-W) U_{1,n,1+n} U_{1,1+n,n} - (-10n + 3n^2 + 3n^3 - 8nW) U_{2,n,n} \right)$$

где $U_{a,b,c} = \left(C_{a,0}^{c,0} \ C_{b,0} \right)^2$; $Y_{a,b,c} = -\sqrt{a(a+1)b(b+1)} \cdot C_{a,0}^{c,0} \ C_{b,0} \cdot C_{a,-1}^{c,0} \ C_{b,1}$, а $C_{l_1, m_1}^{l, m} \ C_{l_2, m_2}$ - коэффициенты Клебша-Гордана.

Из критерия устойчивости осцилляций в виде вещественности собственных частот ω_n получены значения полевого параметра, критические для наступления гидродинамической неустойчивости n -й гармоники осцилляций поверхности капли:

$$w_{cr} = \frac{n(n-1)(2+n-4W)}{C_{\omega}};$$

Проведённый анализ зависимости w_{cr} , показал, что критические условия гидродинамической неустойчивости капиллярного возмущения заряженной поверхности капли в однородном электростатическом поле определяются комбинацией полевого и зарядового параметров для второй гармоники осцилляций, и снижаются по мере увеличения собственного заряда капли. С увеличением номера гармоники n значения w_{cr} выходят на насыщение и существует значение полевого параметра w , при котором осцилляций любой гармоники будут неустойчивы.

Показано, что при возбуждении в начальный момент времени единичной k -й гармоники осцилляций с амплитудой ζ одновременно с ней возбуждается спектр связанных гармоник с номерами $k+m$, где $m \in M = \{-2, -1, 1, 2\}$. Гармоники данного спектра неустойчивы одновременно с изначально возбуждённой k -й гармоникой.

Как показал последующий анализ, приведённые выше выводы о гидродинамической устойчивости свободной поверхности капли справедливы и для заряженных капель в неоднородных электростатических полях.

Раздел 2.2 посвящён исследованию гидродинамической устойчивости капиллярных осцилляций поверхности капли с собственным зарядом Q . Задача формулируется на основе классических подходов электрогидродинамики и механики сплошной среды. Рассматривается капля идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости в

неоднородном электростатическом поле, создаваемым точечным зарядом величиной q на расстоянии L от центра масс капли. Сферическая система координат, связанная центром масс капли вводится таким образом, что точечный заряд q находится на луче $\theta = 0$.

Математическая постановка такой задачи состоит из основных уравнений электрогидродинамики и механики жидкости и аналогична задаче раздела 2.1 с тем отличием, что внешнее по отношению к капле поле создаётся точечным зарядом, и электрический потенциал в окрестности капли записывается следующим выражением:

$$\Phi = \Phi_{ex}^{ch} + \Phi_d \quad \Phi_{ex}^{ch} \equiv \frac{q}{r'}; \quad r' = \sqrt{(r^2 + L^2 - 2Lr\mu)^2} \quad \mu \equiv \cos \theta;$$

Задача решается классическими методами гидродинамики в линейном приближении по отношению амплитуды капиллярного возмущения к радиусу капли. Проводятся стандартные процедуры обезразмеривания и скаляризации задачи, аналогичные использованным в разделе (2.1). Давление инерции в текущей и последующих (главы 2.3, 3.1, 3.2) постановке рассчитывается аналогично разделу 2.1.

Получены разложения Φ_{ex}^{ch} и первых двух его производных по r в ряды по полиномам Лежандра $P_k(\mu)$ с учётом ограниченного числа слагаемых и оценкой величины сопутствующей погрешности. Погрешность при замене точного выражения на приближённое разложение с учётом слагаемых пропорциональных $P_{k_m}(n)$ включительно не превышала 1%. Получен явный аналитический вид коэффициентов указанных разложений.

Форма равновесной поверхности такой капли определяется в виде разложения по полиномам Лежандра, с числом слагаемых, определяемых требуемой точностью разложения.

$$r(\theta) = 1 + h(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{2k_m} a_n P_n(\mu) \quad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{8\pi(k-1)(k+2 - \frac{Q^2}{4\pi})} \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{m=-k}^k (S_{n+m} + (n+m+1)F_{n+m})(S_k + (k+1)F_k) U_{m,n+m,n}$$

Получено выражение для гидродинамического потенциала $\psi(r, \theta, t)$ в капле:

$$\psi(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) r^n P_n(\mu) \quad (2)$$

$$V_n(t) = \frac{1}{n} \left(\alpha_n'(t) - \sum_{k=2}^{2k_{max}} \sum_{m=-k}^k a_k \alpha_{m+n}'(t) \left((-1+m+n) U_{k,m+n,n} - \frac{Y_{k,m+n,n}}{m+n} \right) \right)$$

Рассчитано гидродинамическое давление в капле и дисперсионное соотношение, определяющее собственную частоту и устойчивость осцилляций отдельно взятой гармоники.

Анализ задачи первого порядка малости по ε показал, что в неоднородном поле вместе с изначально возбуждённой гармоникой на поверхности капли возбуждается более широкий, по сравнению с однородным полем, спектр гармоник, определяемый также количеством учтённых в разложениях слагаемых. Движение поверхности капли определяется функцией возмущения поверхности:

$$\xi(\theta, t) = \zeta \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + \quad (3)$$

$$+ \zeta \sum_{m \in M} C_{-m}^S(k+m) [\cos(\omega_k t) - \cos(\omega_{k+m} t)] P_{k+m}(\mu).$$

где $M = \{-2k_m, -2k_m + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, 2k_m - 1, 2k_m\}$, $k_m = 10$, а $C_{-m}^S(k+m)$ - численные коэффициенты, включающие в себя остальные параметры задачи.

Критические значения полевого параметра $w = \frac{E_c^2}{16\pi}$, где $E_c = \frac{q}{L^2}$ оказались существенно ниже, чем в однородном поле, что означает значительное влияние неоднородности поля на критические условия развития электрогидродинамической неустойчивости поверхности капли.

Раздел 2.3 посвящен исследованию устойчивости капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости в неоднородном электростатическом поле точечного диполя с использованием подходов механики сплошной среды. Математическая постановка задачи аналогична той, что используется в (2.2) и решается в модели потенциального течения жидкости. Внешний по отношению к капле потенциал в текущей постановке представляется выражением $\Phi_{ex}^{dip} \equiv \frac{p(r\mu - L)}{(r')^3}$. Разложение потенциала и его производных

в ряды по полиномам Лежандра и оценка погрешностей проводится по той же методике, что и для капли в неоднородном поле точечного заряда в разделе 2.2.

Равновесная форма поверхности капли представляется выражением аналогичным (1) с тем отличием, что $k_m = 12$, а коэффициенты разложений потенциала имеют другие выражения в явном представлении. Возмущённая поверхность капли описывается более широким, по сравнению с каплей в поле точечного заряда спектром гармоник в соответствии с выражением (3).

Рассчитанные значения полевого параметра $w = \frac{E_c^2}{16\pi}$ (где $E_c^2 = \frac{4\rho^2}{L^6}$

определяется единообразно с полем точечного заряда) показывают, что электрогидродинамическая неустойчивость капли в поле точечного диполя начнёт развиваться при меньших значениях полевого параметра по сравнению с каплей как в однородном поле, так и в поле точечного заряда.

Третья глава посвящена аналитическому расчету в рамках физической электрогидродинамики критических условий устойчивости заряженной капли во внешних неоднородных электростатических полях сложных конфигураций – поля тонкой заряженной нити и поля заряженного проводящего стержня конечной толщины.

В разделе 3.1 в рамках классической электрогидродинамики проведён аналитический асимптотический анализ устойчивости капиллярных осцилляций заряженной капли находящейся во внешнем неоднородном электростатическом поле заряженной тонкой нити.

В рамках механики сплошной среды были определены: гидродинамический потенциал, давление на поверхности капли и функция, описывающая форму такой капли, подвергнутую капиллярному возмущению малой амплитуды. Исследована устойчивость свободной поверхности жидкости, определён спектр гармоник капиллярного возмущения, связанных с начально возбуждённой гармоникой.

Рассматривалась капля радиуса R с собственным зарядом Q идеальной, идеально проводящей несжимаемой жидкости плотностью ρ , с коэффициентом поверхностного натяжения σ . Тонкая нить длиной $2a$ расположена вдоль прямой, проходящей через центр масс капли. Ближайший к капле конец нити находится на расстоянии L от центра масс капли в направлении $\theta = 0$. На нити находится заряд q , создающий внешнее по отношению к капле электростатическое поле.

Определены критические для потерей поверхностью капли устойчивости значения полевого параметра $w = \frac{E_c^2}{16\pi}$ где $E_c^2 = \frac{q^2}{L^2(L+2a)^2}$ -

квадрат напряжённости внешнего электростатического поля в точке центра масс капли. В случае очень длинной нити ($2a \approx 200$) критические значения полевого параметра примерно на 20% меньше аналогичных для однородного поля. Меньшим значениям длины нити соответствуют

меньшие значения полевого параметра. При $a \rightarrow 0$ зависимости переходят в выражения для поля точечного заряда.

Раздел 3.2 посвящен исследованию капиллярных осцилляций заряженной капли идеально проводящей жидкости во внешнем неоднородном электростатическом поле проводящего стержня конечных размеров, поддерживаемого при постоянном потенциале. Такая конфигурация проста в реализации и используется для генерации электростатических полей, вызывающих электрогидродинамическую неустойчивость капель. Исследование проводится в рамках стандартных методов и моделей гидромеханики идеальной несжимаемой жидкости.

Постановка задачи и взаимное расположение капли и стержня аналогичны таковым для капли и нити раздела 3.1. Цилиндрический стержень имеет длину $2a$ и диаметр $2b$ и поддерживается при постоянном потенциале величиной φ_0 . Рассматриваются стержни, диаметр которых не превышает размеров капли.

Анализ критических значений полевого параметра $w = \frac{E_c^2}{16\pi}$, введённого единообразно другим конфигурациям электростатических полей показал, что увеличение толщины стержня приводит к незначительному снижению критических значений полевого параметра, соответствующему уменьшению неоднородности создаваемого им поля.

При этом увеличение толщины стержня оказывает значительный эффект на значения потенциала, подаваемого на стержень, при котором капля становится неустойчивой, существенно снижая их (Рисунок 1). Это объясняется существенным увеличением ёмкости стержня, соответствующим увеличением заряда на нём и генерации им поля большей напряжённости в окрестности капли.

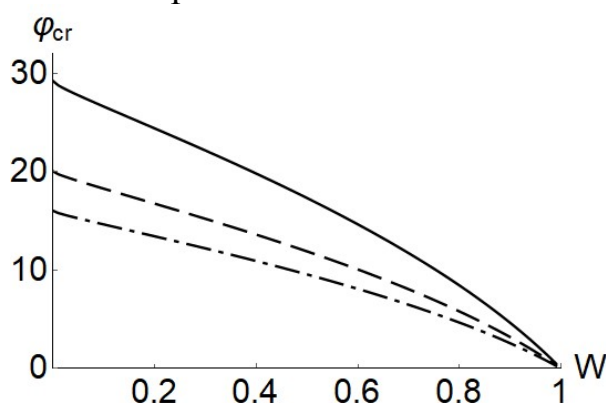


Рисунок 1. Зависимость критических значений потенциала, подаваемого на стержень, от величины зарядового параметра при $\varphi_0 Q < 0$, $a = 5$ и $L = 3$. Сплошная линия - $b = 0.3$, пунктирная - $b = 1$, штрихпунктирная - $b = 2$.

Четвёртая глава посвящена объединению и сравнению результатов, полученных в предыдущих главах.

В главе проведён сравнительный анализ электрогидродинамической устойчивости капиллярных осцилляций заряженной капли идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости во внешних электростатических полях различной конфигурации, полученный в рамках механики сплошной среды. Во всех задачах, рассмотренных ранее полевой параметр $w = \frac{E_c^2}{16\pi}$ вводится таким образом, чтобы он характеризовал некоторую среднюю величину напряжённости внешнего электростатического поля в окрестности капли, никак не характеризуя при этом его неоднородности. Это позволяет разделить величину и неоднородность поля и напрямую сравнить влияние неоднородности поля на критические условия неустойчивости капли. Анализ основных свойств электрогидродинамической неустойчивости капли показал, что все характеристики, свойственные заряженной капле в однородном поле присущи и всем рассмотренным неоднородным полям. Качественным отличием является то, что в неоднородных электростатических полях получено по два критических значения полевого параметра, которые приведены на рисунке 2.

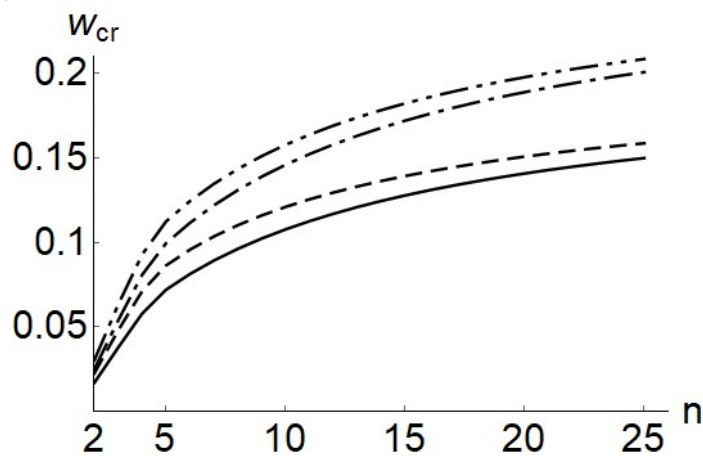


Рисунок 2 Критические значения полевого параметра от номера гармоники при $W = 0.25$. Штрихпунктирная линия с двумя точками – поле тонкого стержня при $\varphi_0 Q > 0$, $a = 5$, и $L = 3$. Штрихпунктирная – поле тонкого стержня при $\varphi_0 Q < 0$, $a = 5$, и $L = 3$. Пунктирная – поле точечного заряда при $qQ > 0$, $L = 3$. Сплошная – поле точечного заряда при $qQ < 0$, $L = 3$

Это связано с генерацией на концах капли в неоднородном поле поверхностной плотности заряда различной величины, и данное «расщепление» критических значений соответствует распаду капли на одном или другом из её концов и зависит от соотношения между знаком собственного заряда капли и направлением внешнего поля. Критические значения полевого параметра оказываются ниже в том случае, когда знаки собственного и индуцированного внешним полем заряда на конце капли, обращённом к источнику неоднородного поля, совпадали.

Как видно из рисунка 3 критические значения полевого параметра снижаются с увеличением собственного заряда Q на капле для всех рассмотренных полей и при $W = 1$ стремятся к нулю. То есть капля будет неустойчива даже в отсутствие внешнего электростатического поля. Значение $W = 1$ соответствует критерию Рэля неустойчивости капли по отношению к собственному заряду.

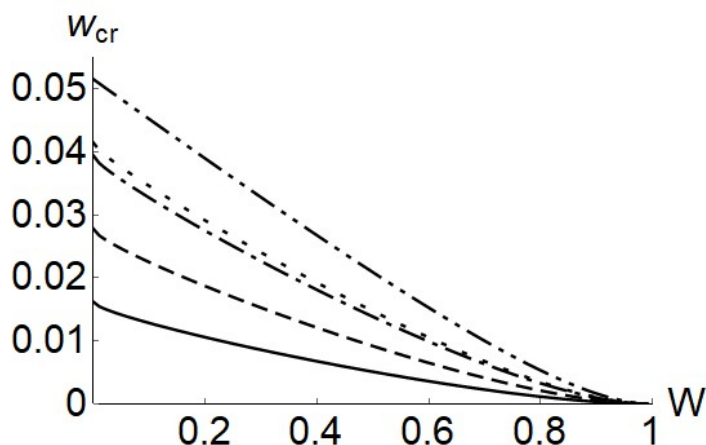


Рисунок 3. Зависимость критических значений полевого параметра от величины зарядового параметра в электростатических полях различной конфигурации. Штрихпунктирная линия с двумя точками – однородное поле. Точечная – поле стержня при $\varphi_0 Q < 0$, $a = 5$, $b = 2$ и $L = 3$. Штрихпунктирная – поле тонкого стержня при $qQ < 0$, $a = 5$, и $L = 3$. Пунктирная – поле точечного заряда при $qQ < 0$, $L = 3$. Сплошная – поле точечного диполя при $pQ > 0$, $L = 3$.

Был проведён сравнительный анализ критических значений полевого параметра для капель, находящихся в полях различной конфигурации (рисунок 3), который показал значительное снижение критических для развития электрогидродинамической неустойчивости значений полевого параметра для капель в полях большей неоднородности. Наименьшие значения полевого параметра соответствуют каплям в электростатических полях точечного заряда и точечного диполя.

Результаты и выводы

1. В рамках электрогидродинамики проведено аналитическое асимптотическое исследование устойчивости заряженной капли во внешнем электростатическом поле. Установлено, что с ростом номера гармоники критическое значение заряда, при котором реализуется неустойчивость капли при фиксированной напряжённости внешнего поля,

выходит на горизонтальную асимптотику. Данный результат отличается от результата Рэлея для изолированной заряженной капли, когда критическое значение заряда неограниченно возрастало с увеличением номера гармоники.

2. В электрогидродинамических расчетах первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций получена аналитическая зависимость критических условий реализации неустойчивости n -й гармоники осцилляций поверхности заряженной капли в однородном и неоднородных полях.

3. Обнаружено, что с увеличением номера гармоники осцилляций зарядовый или полевой параметр монотонно повышаются и стремятся к некоторым постоянным значениям.

4. Установлено, что с увеличением степени неоднородности поля критические условия неустойчивости осцилляций отдельных гармоник и капли в целом снижаются.

5. Продемонстрировано, что неоднородность поля оказывает существенное влияние на критерий устойчивости капли при расположении источников поля на расстояниях от капли порядка ее радиуса.

6. В проведенном сравнительном анализе спектра возбуждаемых гармоник в электростатических полях разной степени неоднородности показано, что с увеличением степени неоднородности поля возрастает число гармоник спектра, связанных с изначально возбужденной гармоникой.

7. Установлено, что при потере устойчивости некоторой гармоникой осцилляций, одновременно с ней теряет устойчивость весь спектр связанных с ней гармоник, даже если критические условия реализации электростатической неустойчивости выполняются не для всех связанных взаимодействием гармоник.

8. Обнаружено, что на условия устойчивости капли в неоднородном поле, создаваемом длинным стержнем при постоянном потенциале большее влияние оказывает толщина стержня а не его длина.

9. Выяснено, что снижение критических условий устойчивости капли в поле стержня с увеличением его толщины связано с увеличением ёмкости стержня и соответствующим увеличением напряжённости поля в окрестности капли, а сопутствующее уменьшение неоднородности поля оказывает меньший эффект.

Публикации автора по теме диссертации

1. Григорьев А.И., Ширяев А.А., Ширяева С.О. О некоторых физических закономерностях реализации неустойчивости капли в однородном электростатическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 5. С. 111-124.
2. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А. О равновесных формах проводящей капли в однородном и неоднородных электростатических полях /ЖТФ, 2013, том 83, выпуск 11, стр. 44-51.
3. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А. О неустойчивости n -й моды осцилляций заряженной капли в однородном электростатическом поле //ЖТФ.-2015.-Т. 85,-Вып. 1.-С. 31-38.
4. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Ширяев А.А. Неустойчивость заряженной капли в кулоновском и дипольном полях //ЖТФ.-2015.-Т. 85.-Вып. 8.-С. 23-32.
5. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Ширяев А.А. Неустойчивость заряженной капли в неоднородном электростатическом поле тонкого стержня. Изв. РАН МЖГ.-2016.-Вып. 2.-С.56-64.
6. Григорьев А.И., Ширяев А.А., Ширяева С.О. Неустойчивость заряженной капли в неоднородном электростатическом поле стержня конечной толщины // Изв. РАН. МЖГ.-2018.-№ 1.-С. 36-50.
7. Григорьев А.И., Ширяев А.А. Осцилляции заряженной капли // XXV Международная научная конференция 17-21 сентября 2012 года, Одесса, Украина, Материалы конференции «Дисперсные системы». С.74-75
8. Ширяев А.А. Нелинейный анализ условий устойчивости поверхности заряженной капли в однородном электрическом поле// Сборник тезисов докладов XIV Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» 26-31 мая 2014 года. МГУ им. М.В. Ломоносова. <http://waves.phys.msu.ru>
9. Ширяев А.А. Нелинейное исследование осцилляций поверхности заряженной капли в поле стержня. Материалы международного молодёжного научного форума «Ломоносов-2016» Москва, МГУ, 11-15 апреля 2016г. ISBN 978-5-317-05237-9.
10. Ширяев А.А. «Об устойчивости заряженной капли во внешних электростатических полях» Глобальная электрическая цепь: материалы четвертой Всероссийской конференции / Геофизическая обсерватория

«Борок» – филиал Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН – Ярославль : Филигрань, 2019.- ISBN 978-5-6042792-4-3.– С 45.-46.

11. Ширяев А.А. «Устойчивость заряженной капли во внешних неоднородных электростатических полях» Материалы Международного молодёжного научного форума «Ломоносов-2019» [Электронный ресурс] Москва. МАКС Пресс.- 2019.