

На правах рукописи

Климачков Дмитрий Александрович

Нелинейные взаимодействия волн в магнитной
гидродинамике вращающейся плазмы со
свободной границей в поле силы тяжести

01.04.02 Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2019

Работа выполнена в Институте космических исследований Российской академии наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор, ИКИ РАН, Петросян Аракел Саркисович

Официальные оппоненты:

Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук,
Зыбин Кирилл Петрович
Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН

Доктор физико-математических наук, профессор, Соколов Дмитрий Дмитриевич
МГУ имени М.В. Ломоносова

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт физики Земли имени О.Ю. Шмидта Российской академии наук (ИФЗ РАН)

Защита состоится
на заседании диссертационного совета Д 002.113.03 Института
космических исследований РАН по адресу: Москва, ул. Профсоюзная,
84/32, ИКИ РАН, подъезд 2 (конференц-зал)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИКИ РАН и на
сайте <http://www.iki.rssi.ru/diss/2019/klimachkov.htm>

Автореферат разослан

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.113.03
кандидат физико-математических наук

О.Ю. Цупко

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Большинство наблюдаемых объектов во Вселенной находится в состоянии плазмы и подвержены вращению. В последнее время активно развиваются теоретические и численные исследования, направленные на решение фундаментальной проблемы описания и изучения многомасштабных течений плазмы путем исследования общих свойств, характеризующих различные астрофизические объекты. Поведение различных звёзд и планет описывается магнитной гидродинамикой тонких слоев плазмы со свободной границей в поле силы тяжести. Например, течения солнечного тахоклина (тонкого слоя внутри Солнца, находящегося над конвективной зоной), динамика атмосфер нейтронных звезд, течения аккреционных дисков нейтронных звезд, захваченные приливами экзопланеты с магнитоактивными атмосферами. Полная трехмерная система магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы достаточно сложна как для аналитического исследования, так и для численного моделирования. Поэтому для описания таких течений астрофизической плазмы используется магнитогидродинамическое приближение мелкой воды [1].

Магнитогидродинамические уравнения мелкой воды получаются в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи из полной системы уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой плазмы усреднением по высоте слоя получены магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды без учета внешнего вертикального магнитного поля. В работе [2] полученные в [1] уравнения записаны путем введения эффектов внешнего поля в уравнения для горизонтальных скоростей и для горизонтальных магнитных полей. Тем не менее, в работе [2] остается открытым вопрос о корректной формулировке условия бездивергентности магнитного поля в приближении мелкой воды во внешне магнитном поле. Заметим, что предложенное в работе [1] условие бездивергентности не удовлетворяется в модернизированной системе магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем поле. Поэтому актуальной является задача развития последовательной теории

как для понимания структуры магнитного поля, так и для постановки корректных начальных условий при численном моделировании.

В линейном приближении система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле имеет решения, описывающие волны магнито-Пуанкаре и магнитострофические волны [2]. В течениях мелкой воды, характерных для солнечного тахоклина присутствует тороидальное (горизонтальное) магнитное поле [3]. Тем не менее, существование магнито-Пуанкаре волн при наличии произвольного горизонтального (полоидального и тороидального) магнитного поля не исследовано и их дисперсионные характеристики не получены. Кроме того, остаётся открытым вопрос о возможности нелинейных эффектов в магнитогидродинамических течениях мелкой воды как в вертикальном магнитном поле, так и в произвольном горизонтальном поле.

Волны магнито-Россби представляют собой крупномасштабные волны во вращающейся плазме, распространяющиеся вследствие неоднородности силы Кориолиса, по аналогии с нейтральной жидкостью. Несмотря на сложность наблюдения волн Россби в астрофизической плазме, они недавно обнаружены на Солнце [4], [5]. Теория таких волн развивается с использованием приближения мелкой воды или геострофического приближения. В случае течений астрофизической плазмы теория волн Россби значительно усложняется вследствие наличия нетривиальных стационарных состояний магнитного поля (например, тороидальное и полоидальное поле или внешнее вертикальное магнитное поле), поэтому основные результаты относительно магнитных волн Россби получены в линейном приближении. В работе [2] развита линейная теория волн Россби в внешнем вертикальном магнитном поле. В работах [3], [6] развита линейная теория волн Россби в тороидальном магнитном поле для описания течений солнечного тахоклина, при этом не рассматривается общий случай горизонтального магнитного поля, характерный для других астрофизических объектов. Кроме того, вопрос о наличии нелинейных эффектов в магнитогидродинамических течениях на β -плоскости остаётся неисследованным как в случае внешнего вертикального магнитного поля, так и в случае горизонтального магнитного поля.

Важным принципиальным свойством течений в астрофизической плазме является свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых во

Вселенной плазменных течений. Для описания сжимаемых течений, как правило, необходимо использовать полную трехмерную систему магнитогидродинамических уравнений, которая также представляет собой сложную задачу для теоретического рассмотрения и численного моделирования. В работах [7], [8] выведена система уравнений мелкой воды для нейтральной жидкости с учетом крупномасштабной сжимаемости. Полученные в этих работах уравнения не учитывают важнейшие для плазменных течений свойства, такие как вращение и наличие магнитного поля. Поэтому представляется важным обобщить полученные в [7], [8] уравнения для магнитогидродинамических течений, характерных для астрофизической плазмы.

Цели работы

1. Теоретическое развитие теории мелкой воды для описания крупномасштабных вращающихся течений тонкого слоя плазмы в присутствии внешнего вертикального магнитного поля. Обобщение развитой теории с учетом крупномасштабной сжимаемости

2. Развитие теории линейных волн Пуанкаре и магнитострофических волн в магнитогидродинамических течениях мелкой воды в горизонтальном магнитном поле, качественный анализ дисперсионных соотношений волн магнитно-Пуанкаре и магнитострофических волн во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле, развитие слабонелинейной теории взаимодействий волн и анализ параметрических неустойчивостей.

3. Развитие теории линейных волн Россби в магнитогидродинамических течениях мелкой воды в горизонтальном магнитном поле, исследование дисперсионных соотношений для волн Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле, развитие слабонелинейной теории взаимодействий волн Россби и анализ параметрических неустойчивостей.

4. Нахождение всех автомодельных непрерывных и разрывных решений для невращающихся течений мелкой воды на ровной границе и на наклонной плоскости, решение задачи распада произвольного разрыва на основе полученных решений.

Научная новизна

Впервые система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле получена из полной трехмерной системы уравнений магнитной гидродинамики для случая сжимаемых и несжимаемых течений. Показано, что в полученной системе гидродинамическое поле двухкомпонентно, в то время как магнитное поле остается трехкомпонентным. Впервые сформулирована задача о реализуемости трехволновых взаимодействий для волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби в сжимаемых и несжимаемых течениях в приближении мелкой воды. Показано наличие нелинейных трехволновых взаимодействий волн магнито-Пуанкаре и волн магнито-Россби, вычислены коэффициенты взаимодействия трех волн. Найдены инкременты параметрических неустойчивостей. Найдены все автомодельные непрерывные и разрывные решения в магнитогидродинамических сжимаемых течениях мелкой воды на ровной границе и на наклонной плоскости, и решена задача распада произвольного разрыва.

Практическая и научная ценность работы

Полученные магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле могут быть использованы для описания течений плазмы на Солнце, течений атмосфер нейтронных звезд, для изучения растекания материи в аккреционных дисках нейтронных звезд, магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами несущей звезды. Выявленная трехкомпонентность магнитного поля в таких течениях, а также учет крупномасштабной сжимаемости представляются важными для анализа недавних экспериментальных наблюдений волн Россби, а также для понимания наблюдательных данных о солнечной активности и в развитии моделей и идей долговременной изменчивости Солнца. Развитая теория волн Россби может быть использована для анализа данных об R-модах и о солнечных и звездных осцилляциях. Полученные в диссертации результаты могут быть полезны при планировании космических миссий и астрофизических наблюдений.

Обоснованность и достоверность полученных результатов

Вывод уравнений мелкой воды магнитной гидродинамики осуществлялся методом усреднения исходной системы уравнений, широко используемым и хорошо себя зарекомендовавшим в геофизической гидродинамике и в физике планетных атмосфер. Полученные системы магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле и с учетом крупномасштабной сжимаемости в частном случае переходят в классические уравнения нейтральной жидкости и широко известные в астрофизике магнитогидродинамические уравнения без внешнего магнитного поля. Все полученные результаты линейной теории, развитой в диссертации, согласуются с известными результатами для течений нейтральной жидкости и для магнитогидродинамических течений. Для развития нелинейной теории используется хорошо зарекомендовавший себя асимптотический метод многомасштабных разложений. Автомодельные разрывные и непрерывные решения системы магнитогидродинамических уравнений мелкой воды с учетом сжимаемости, так же как и решение задачи распада разрыва переходят в соответствующие известные решения в случае отсутствия магнитного поля и в случае отсутствия сжимаемости.

Положения, выносимые на защиту

1. Получена полная система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле с корректным учетом условия бездивергентности магнитного поля. В полученной системе поле скоростей содержит только горизонтальные компоненты, в то время как магнитное поле остается трехкомпонентным. Полученная система уравнений обобщена на случай сжимаемых течений. Получены уравнения мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении бета-плоскости как в сжимаемом, так и в несжимаемом случае.

2. Найдены дисперсионные соотношения для волн магнито-Пуанкаре и для магнитострофических волн в горизонтальном магнитном поле, показано, что волны магнито-Пуанкаре и магнитострофические волны во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном поле испытывают трехволновые взаи-

модействия. Найдены коэффициенты взаимодействия для всех случаев трехволновых взаимодействий и найдены инкременты параметрических неустойчивостей. Показано, что учет сжимаемости приводит к изменениям в групповой и фазовой скоростях волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн, а также к изменениям в выражениях для коэффициентов трехволновых взаимодействий и инкрементов параметрических неустойчивостей.

3. Найдены дисперсионные соотношения для волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле, показано, что волны магнито-Россби в магнито-гидродинамическом приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле испытывают трехволновые взаимодействия в слабонелинейном приближении. Найдены коэффициенты взаимодействия волн магнито-Россби в обоих случаях, найдены инкременты параметрических неустойчивостей. Показано, что учет сжимаемости приводит к изменениям в групповой и фазовой скоростях волн магнито-Россби, а также к изменениям в выражениях для коэффициентов трехволновых взаимодействий и инкрементов параметрических неустойчивостей.

4. Для системы магнито-гидродинамических уравнений в приближении мелкой воды в отсутствии вращения с учетом крупномасштабной сжимаемости найдены все автомодельные непрерывные и разрывные решения на ровной границе и на наклонной плоскости. Решена задача распада произвольного разрыва на ровной границе и на наклонной плоскости. Показано, что решение содержит те же самые конфигурации, как решение задачи Римана без учета сжимаемости. Найдено, что учет сжимаемости меняет границы областей начальных условий, в которых реализуются те или иные конфигурации течения. Решение задачи распада разрыва обобщено на случай течения на наклонной плоскости.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на семинарах сектора 53.9 ИКИ РАН, а также на международных и российских конференциях:

- Конференция молодых ученых ИКИ РАН, Москва, 2016-2019
- Всероссийская научная конференция МФТИ, Москва, 2015-2018
- Курчатовская междисциплинарная молодежная научная школа, Москва,

НИИ "Курчатовский Институт 2015-2017, 2019

- Arcetri Workshop on Plasma Astrophysics, Florence, Italy, 2019
- General Assembly of European Geosciences Union, Vienna, Austria, 2015-2017
- Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics, Boston, Massachusetts, USA, 2015, Denver, CO, USA, 2017
- American Geophysical Union Fall Meeting, San Francisco, USA, 2015-2016
- 11th European Fluid Mechanics Conference, Sevilla, Spain, 2016

Публикации по теме диссертации

Результаты диссертационной работы опубликованы в 5 статьях в реферируемых российских и международных журналах, рекомендованных ВАК, и представлены в 21 тезисе докладов российских и международных конференций.

1. Климачков Д.А., Петросян А.С., Нелинейные взаимодействия волн в магнитной гидродинамике астрофизической плазмы в приближении мелкой воды, ЖЭТФ, Том 149, Вып. 5, стр. 965, 2016

2. Климачков Д.А., Петросян А.С., Нелинейная теория магнитогидродинамических течений сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды, ЖЭТФ, Том 150, Вып. 3, стр. 602, 2016

3. Klimachkov D.A., Petrosyan A.S., Parametric Instabilities in Shallow Water Magnetohydrodynamics of Astrophysical Plasma in External Magnetic Field, Phys. Lett. A, 381, p.106, 2017

4. Климачков Д.А., Петросян А.С., Волны Россби в магнитной гидродинамике вращающейся плазмы в приближении мелкой воды, ЖЭТФ, Том 152, Вып. 4, стр. 705, 2017

5. Климачков Д.А., Петросян А.С., Крупномасштабная сжимаемость во вращающихся течениях астрофизической плазмы в приближении мелкой воды, ЖЭТФ, Том 154, Вып. 6, стр. 1239, 2018

Личный вклад автора

Автор принимал участие в постановке задач, проводил все аналитические исследования, принимал участие в интерпретировании полученных результатов, принимал участие в подготовке статей.

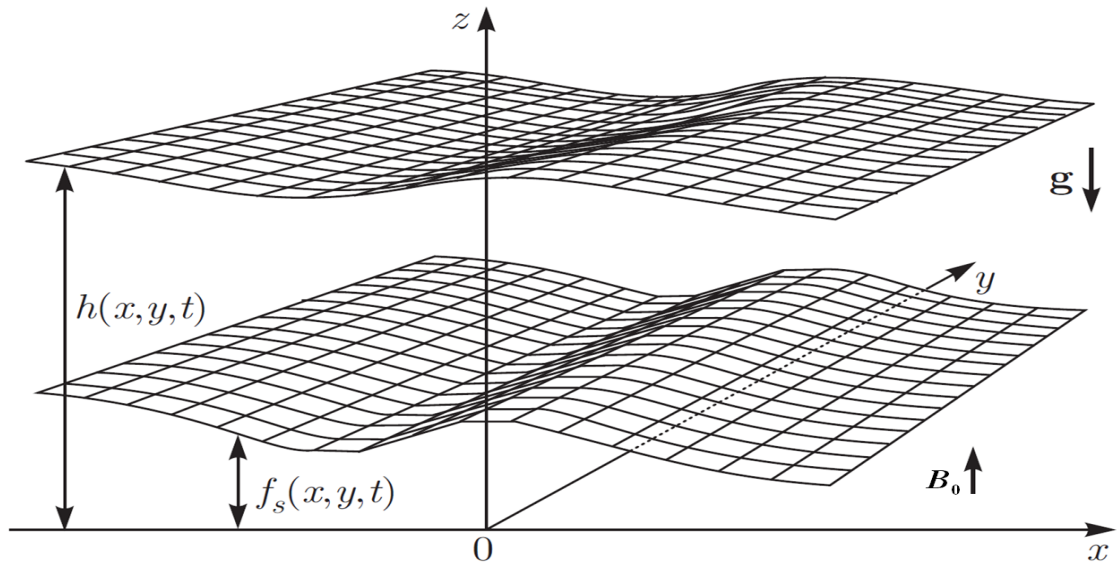


Рис. 1: Тонкий слой плазмы в вертикальном магнитном поле

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения, содержит 145 страниц и 16 рисунков. Список используемой литературы содержит 66 наименований.

Содержание работы

В первой главе диссертации развита магнитогидродинамическая теория мелкой воды для вращающейся плазмы со свободной границей в поле силы тяжести, находящейся во внешнем вертикальном магнитном поле (Рис. 1). Полученная система уравнений имеет стационарное решение либо в вертикальном, либо в горизонтальном магнитном поле. Изучаются волны магнито-Пуанкаре и магнитострофические волны как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле.

В разделе 1.2 получена система магнитогидродинамических уравнений вращающейся мелкой воды на неровной границе во внешнем вертикальном магнитном поле. Система получена из исходных трехмерных уравнений магнитной гидродинамики усреднением уравнений по высоте слоя в предположении гидростатичности распределения давления и малости толщины слоя по отноше-

нию к характерному горизонтальному линейному размеру задачи. В результате полученная система уравнений записывается относительно переменных высоты слоя, средней по высоте горизонтальной скорости течения и среднего по высоте магнитного поля. В полученной системе уравнений наличие внешнего вертикального магнитного поля приводит к дополнительным слагаемым в уравнениях для изменения импульса и для магнитной индукции и к необходимости учета вертикальной компоненты магнитного поля. Для решения этой задачи необходимо модернизировать вывод магнитогидродинамических уравнений мелкой воды, а именно, пренебречь вертикальными ускорениями только в уравнениях импульса, сохранив при этом усредненные слагаемые для вертикальной компоненты магнитного поля. В разделе получены уравнения для вертикальной составляющей магнитного поля и следствие условия бездивергентности, удовлетворяющееся тождественно при задании корректных начальных условий и содержащее вертикальную компоненту магнитного поля. Таким образом, модернизированные уравнения мелкой воды описывают трехмерную структуру магнитного поля и позволяют глубже понять как линейные, так и нелинейные эффекты в изучаемых плазменных течениях. Уравнение для вертикальной составляющей магнитного поля отделяется от остальных уравнений системы, так что для дальнейшего исследования течений оно не используется. При отсутствии внешнего магнитного поля система уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле сводится к известной системе со стационарными решениями в виде горизонтальных (полоидального, тороидального и их суммы) магнитных полей.

В разделе 1.3 приводится система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды на ровной границе при наличии вращения во внешнем вертикальном магнитном поле. Получены линейные решения для течений во внешнем вертикальном магнитном поле в виде, удобном для исследования нелинейных эффектов, а также развита линейная теория магнитогидродинамических течений мелкой воды для случая течений в горизонтальном (сумма тороидального и полоидального) магнитном поле. Для существования трехволновых взаимодействий между волнами с разными волновыми векторами \mathbf{k} и частотами ω в общем случае необходимо выполнения условия синхронизма $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$.

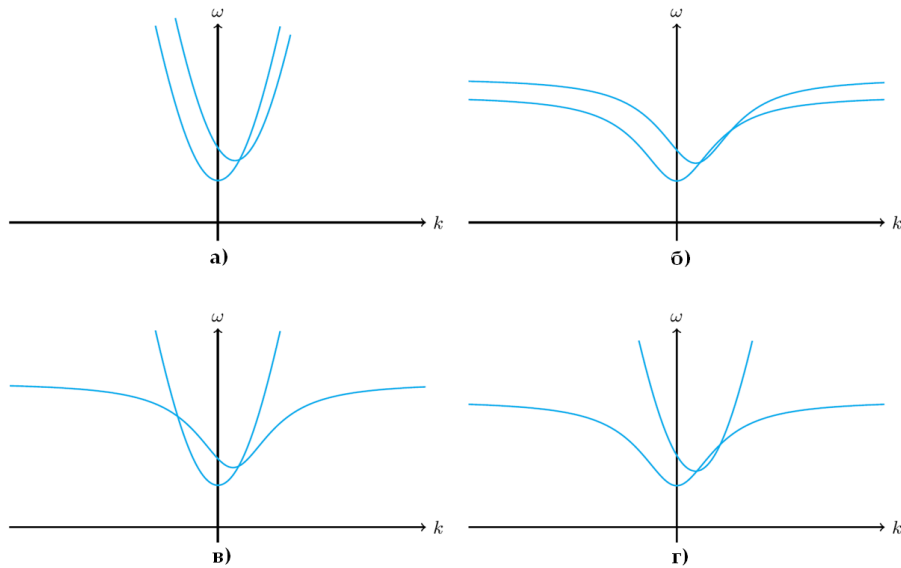


Рис. 2: а) Взаимодействие трех волн магнито-Пуанкаре, б) взаимодействие трех магнитострофических волн, в) взаимодействие двух волн магнито-Пуанкаре и одной магнитострофической волны, г) взаимодействие одной волны магнито-Пуанкаре и двух магнитострофических волн

Это условие изображено на графике (Рис. 2). Первое слагаемое задает точку $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$ дисперсионной поверхности одного из решений, второе слагаемое — точку $(\mathbf{k}_2, \omega(\mathbf{k}_2))$ на смещенной на $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$ дисперсионной поверхности. Наличие пересечения поверхностей означает существование такого набора из трех волн, который удовлетворяет условию синхронизма. Показано, что закон дисперсии линейных волн во внешнем вертикальном магнитном поле, а также и в горизонтальном магнитном поле обеспечивает выполнение условий синхронизма, необходимых для трехволновых нелинейных взаимодействий. Найдены все возможные трехволновые конфигурации линейных волн, для которых реализуются нелинейные взаимодействия: три волны магнито-Пуанкаре, три магнитострофических волны, две волны магнито-Пуанкаре и одна магнитострофическая волна, одна волна магнито-Пуанкаре и две магнитострофические волны (Рис. 2). В случае отсутствия магнитного поля магнитострофические волны исчезают и в слое распространяются только гравитационные волны Пуанкаре, аналогичные волнам в гидродинамике нейтральной жидкости в поле силы тяжести со свободной границей.

В разделе 1.4 для анализа нелинейного взаимодействия волн использует-

ся асимптотический метод многомасштабных разложений. Для каждой рассмотренной конфигурации из трех волн как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле получены нелинейные уравнения взаимодействия медленно меняющихся амплитуд. Полученные уравнения трехволновых взаимодействий описывают физические эффекты слабонелинейного взаимодействия волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн. Анализ полученных нелинейных уравнений, описывающих трехволновые взаимодействия волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн, показал существование двух типов неустойчивостей: распадные неустойчивости и параметрическое усиление. Найдено, что существуют следующие четыре типа распадных неустойчивостей: волна магнито-Пуанкаре распадается на две волны магнито-Пуанкаре; магнитострофическая волна — на две магнитострофические волны; волна магнито-Пуанкаре — на одну волну магнито-Пуанкаре и одну магнитострофическую; магнитострофическая волна — на одну магнитострофическую и одну волну магнито-Пуанкаре. Получены инкременты найденных распадных неустойчивостей. Исследованы четыре механизма параметрического усиления: усиление волн магнито-Пуанкаре, магнитострофических волн, а также волны магнито-Пуанкаре в поле магнитострофической волны и магнитострофической волны в поле волны магнито-Пуанкаре. Для каждой исследованной неустойчивости найдены коэффициенты параметрического усиления.

Во второй главе диссертации развивается теория волн Россби в магнитной гидродинамике в вертикальном и в горизонтальном магнитном поле в приближении мелкой воды.

В разделе 2.2 обсуждается приближение β -плоскости для вращающихся магнитогидродинамических течений тонкого слоя плазмы на сфере. Получена система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле на β -плоскости на неровной границе, включающая модернизированное условие, обеспечивающее бездивергентность магнитного поля. Показано, что магнитное поле в полученной системе принципиально трехмерно. При отсутствии внешнего магнитного поля система уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле на β -плоскости сводится к известной системе магнитогидродинамических уравнений

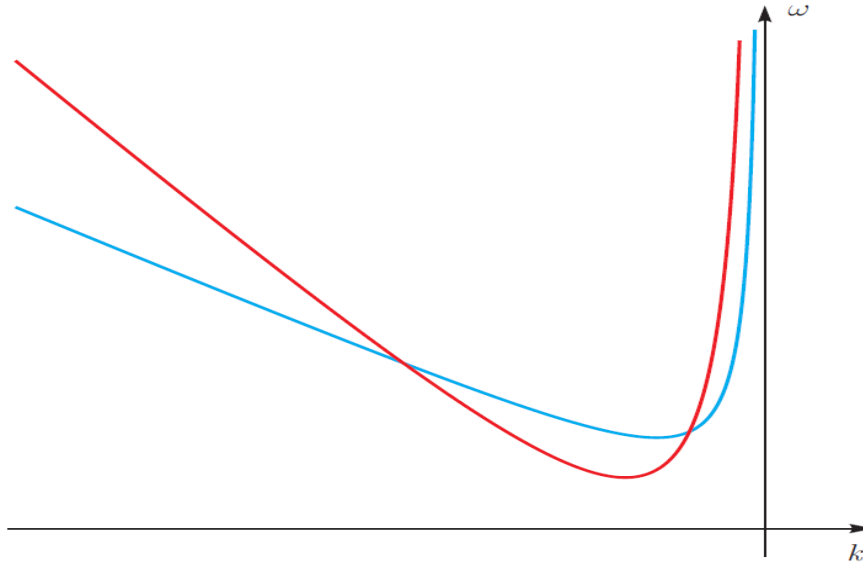


Рис. 3: Взаимодействие трех волн магнито-Россби

на β -плоскости со стационарными решениями в виде горизонтальных (полоидального, тороидального и их суммы) магнитных полей.

В разделе 2.3 получены дисперсионные соотношения для волн магнито-Россби как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле. Проведен качественный анализ полученных дисперсионных соотношений, и для каждого случая показано, что выражения для дисперсионных соотношений обеспечивают возможность трехволновых взаимодействий волн магнито-Россби в слабонелинейном приближении (Рис. 3).

В разделе 2.4 методом многомасштабных разложений получена нелинейная система уравнений для медленно меняющихся амплитуд трех взаимодействующих волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле, а также аналогичная система уравнений для волн магнито-Россби в горизонтальном (тороидальном и полоидальном) магнитном поле. Для обоих случаев установлено наличие двух типов параметрических неустойчивостей: распадной неустойчивости, когда волна магнито-Россби распадается на две волны магнито-Россби, и параметрического усиления, когда амплитуда одной волны магнито-Россби растет в поле двух других волн. Получены выражения для инкрементов параметрических неустойчивостей.

В третьей главе изучается влияние крупномасштабной сжимаемости на волны в магнитной гидродинамике во вращающейся плазме в приближении мелкой

воды, а также исследуются непрерывные и разрывные автомодельные решения и задача распада произвольного разрыва для магнитогидродинамических уравнений мелкой воды в сжимаемом приближении.

В разделе 3.2 получены две системы магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле на неровной границе с учетом крупномасштабной сжимаемости: система уравнений на f -плоскости и система уравнений на β -плоскости. Упрощенная система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды, получается из исходных уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы усреднением по высоте слоя в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи и является обобщением системы уравнений, полученной в первой главе диссертационной работы. В этом приближении фильтруются звуковые волны, и учитывается зависимость плотности от давления на крупных масштабах, описывающая эффекты сжимаемости. Полученная система уравнений нетривиальным образом зависит от отношения характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. В отличие от магнитогидродинамических уравнений мелкой воды для несжимаемой плазмы, высота свободной поверхности не является определяющей характеристикой для описания течения, так как закон сохранения массы записывается через новую переменную, которая зависит от плотности плазмы и высоты слоя плазмы. Динамика течений, описываемых полученной системой в случаях, когда характерная плотностная высота много меньше характерной высоты слоя, существенно отличается от случая несжимаемой жидкости, вследствие различия выражений для скорости распространения слабых возмущений и того, что в качестве эквивалента массы в полных магнитогидродинамических уравнениях используется переменная, нетривиально связанная с высотой слоя.

Развитая в первой главе теория линейных волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле в разделе 3.3 обобщается на случай сжимаемых течений. Показано, что наличие крупномасштабной сжимаемости приводит к

изменению фазовой и групповой скоростей рассматриваемых волн. Проведен качественный анализ дисперсионных соотношений линейных волн, и сделаны выводы о возможности трехволновых взаимодействий для различных трехволновых конфигураций волн в сжимаемой плазме как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле. Методом многомасштабных разложений получены уравнения трехволновых взаимодействий для найденных конфигураций. Показано наличие параметрических неустойчивостей. Коэффициенты взаимодействия и инкременты неустойчивостей существенно отличаются от случая несжимаемого течения.

В разделе 3.4 на основе системы магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле с учетом сжимаемости получены дисперсионные соотношения для волн магнито-Россби. Показано, что учет крупномасштабной сжимаемости приводит к изменениям в выражениях для фазовой и групповой скоростей волн магнито-Россби. Анализ дисперсионных соотношений показал, что как в случае течений в вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле волны магнито-Россби испытывают трехволновые взаимодействия. Методом многомасштабных разложений получены уравнения трехволновых взаимодействий. Аналогично случаю несжимаемой плазмы исследуются параметрические неустойчивости при взаимодействии трех волн магнито-Россби как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле.

В разделе 3.5 в явном виде получены простые автомодельные решения уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы в приближении мелкой воды над ровной границей при отсутствии вращения: магнитогравитационные волны разрежения, магнитогравитационные ударные волны и альфвеновские волны. Аналогичные решения найдены для магнитогидродинамических уравнений сжимаемой мелкой воды на наклонной плоскости. Для нахождения таких решений используется обобщенное определение простой волны, которое сводится к классическому определению в случае отсутствия источников слагаемого. Показано, что характеристиками системы уравнений в таком случае являются параболы, которые переходят в прямые в случае плоской границы.

В разделе 3.6 получено точное явное решение начальной задачи с кусочно-

постоянными начальными условиями для уравнений магнитной гидродинамики в приближении сжимаемой мелкой воды на ровной границе при отсутствии вращения (задача Римана). Показано, что решение представляет собой одну из пяти волновых конфигураций: «две магнитогравитационные ударные волны, две альфвеновские волны»; «левая магнитогравитационная ударная волна, правая магнитогравитационная волна разрежения, две альфвеновские волны»; «левая магнитогравитационная волна разрежения, правая магнитогравитационная ударная волна, две альфвеновские волны»; «две магнитогравитационные волны разрежения, две альфвеновские волны»; «две магнитогравитационные волны разрежения, зона вакуума». Найдены условия на начальные данные, при которых реализуется каждая конкретная конфигурация и исследованы отличия рассматриваемого течения от несжимаемого случая. Несмотря на формальное сходство решений в классическом случае магнитогидродинамических течений несжимаемой жидкости и сжимаемого случая, нелинейная динамика, описываемая полученными решениями, существенно отличается вследствие различия выражений для квадрата скорости распространения слабых возмущений. Решена задача распада произвольного разрыва для магнитогидродинамических течений сжимаемой плазмы в поле силы тяжести в приближении мелкой воды на наклонной плоскости. Решение состоит из пяти волновых конфигураций таких, как и в случае ровной границы. Для каждой конфигурации найдены необходимые и достаточные условия ее реализации. На наклонной границе вместо областей с однородным течением реализуются области равноускоренного течения, характеристики и ударные волны распространяются по параболическим траекториям.

В заключении приведены результаты работы.

Список литературы

- [1] Gilman, P.A. "Magnetohydrodynamic "shallow water" equations for the solar tachocline." *The Astrophysical Journal Letters* 544.1 (2000): L79.
- [2] Heng, K., and Spitkovsky, A. "Magnetohydrodynamic shallow water waves: linear analysis." *The Astrophysical Journal* 703.2 (2009): 1819.

- [3] Zaqarashvili, T.V., Oliver, R., Ballester, J.L., Shergelashvili, B.M. Rossby waves in shallow water magnetohydrodynamics. *Astronomy & Astrophysics* 470(3) (2007): 815-20.
- [4] McIntosh, S.W., Cramer, W.J., Marcano, M.P., Leamon, R.J. "The detection of Rossby-like waves on the Sun." *Nature Astronomy* 1.4 (2017): 0086.
- [5] Löptien, B., et al. "Global-scale equatorial Rossby waves as an essential component of solar internal dynamics." *Nature Astronomy* 2.7 (2018): 568.
- [6] Zaqarashvili, T. V., et al. "Rossby waves and polar spots in rapidly rotating stars: implications for stellar wind evolution." *Astronomy & Astrophysics* 532 (2011): A139.
- [7] Карельский, К.В., Петросян, А.С., Черняк, А.В. "Нелинейная динамика течений тяжелого сжимаемого газа в приближении мелкой воды." *Журнал экспериментальной и теоретической физики* 141.6 (2012): 1206-1221.
- [8] Карельский, К.В., Петросян, А.С., Черняк, А.В. "Нелинейная теория течений сжимаемого газа в поле силы тяжести в приближении мелкой воды над неоднородной границей." *Журнал экспериментальной и теоретической физики* 143.4 (2013): 779-798.