

На правах рукописи



Ратманова Олеся Викторовна

**СВЯЗАННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДЛЯ
КРУГЛЫХ БИМОРФНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПЛАСТИН**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Самара-2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Самарский государственный технический университет» на кафедре «Строительная механика и сопротивление материалов»

Научный руководитель: **Шляхин Дмитрий Аверкиевич**
доктор технических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Лычев Сергей Александрович**,
доктор физико-математических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник лаборатории
«Механика технологических процессов»,
ФГБУ «Институт проблем механики им. А.Ю.
Ишлинского Российской академии наук»

Овчинников Игорь Георгиевич,
доктор технических наук, профессор кафедры
«Транспортное строительство», ФГБОУ ВО
«Саратовский государственный технический
университет им. Ю.А. Гагарина»


Ведущая организация: **ФГБОУ ВО «Пермский национальный
исследовательский политехнический
университет», г. Пермь**

Защита состоится « 20 » декабря 2019 г. в 13:30 часов на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.122.02 на базе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» по адресу: Самара, ул. Галактионовская, 141, ауд. 33.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» и на сайте: <http://d99912202.samgtu.ru/node/6>

Отзывы на автореферат просьба высылать по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская 244, главный корпус

Автореферат разослан « ____ » _____ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета _____  Луц Альфия Расимовна

Общая характеристика работы

Актуальность работы. При проектировании современных приборов и конструкций используются материалы, в которых механические процессы взаимосвязаны с физическими явлениями другой природы. В частности, большое практическое применение получили пьезоэлектрические системы, работа которых основана на связанности упругих и электрических полей напряжения. Их широкое применение объясняется возможностью создания искусственных пьезокерамических материалов с наведенной поляризацией, которые обладают высокими эксплуатационными параметрами и низкой себестоимостью. Данные конструкции находят свое применение в машиностроении, ультра- и гидроакустике, приборостроении, в различных измерительных и управляющих устройствах. При их различном функциональном назначении в основе работы используется одно и то же явление: преобразование электрической энергии в механические колебания (обратный пьезоэффект) или индуцирование электрического импульса вследствие действия механической нагрузки (прямой пьезоэффект).

Для оптимизации работы пьезокерамических преобразователей в реальных условиях, возникает необходимость проведения углубленного анализа нестационарных процессов, позволяющего понять картину взаимодействия механических и электрических полей напряжений. Задача становится значительно сложнее, когда исследуемая конструкция представлена в виде многослойной системы с упругими и электроупругими слоями. Такие пьезокерамические преобразователи, имеющие каноническую форму в виде тонких круглых пластин, при аксиальной поляризации электроупругого материала, находят свое наибольшее распространение.

В настоящее время исследование напряженно-деформированного состояния и характера распределения электрического поля в электроупругих биморфных конструкциях проводится с помощью прикладных теории для тонких пластин, которые позволяют получать приближенные результаты. Исследования в данном направлении опираются на фундаментальные труды авторов: А.В. Белоконь, А.О. Ватульян, В.Л. Карлаш, Р.Д. Миндлин, Н.А. Сенник, В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга, Ю.Б. Евсейчик, А.А. Рынкова, И.В. Янчевский, В.Г. Савин, А.И. Лурье, Л.Д. Ландау, В.З. Партон, N.T. Adelman, U. Gabbert и др.

Однако, несмотря на большое количество работ, посвященных исследованию электроупругих пластин с помощью прикладных теорий, для

более качественной оценки их функциональных возможностей при действии произвольной нестационарной электромеханической нагрузки возникает необходимость в разработке математических моделей и построению замкнутых решений в трехмерной постановке.

Цель работы является разработка методики расчета круглых многослойных симметричных и асимметричных биморфных пластин постоянной, а также ступенчато переменной толщины в случае действия нестационарной электромеханической нагрузки.

Для достижения данной задачи были построены новые замкнутые решения связанных осесимметричных начально–краевых задач теории электроупругости для многослойных сплошных конструкций, а также разработана математическая модель и исследовано напряженно–деформированное состояние биморфной пластины ступенчато переменной толщины.

Методы исследования. Для решения поставленных линейных краевых задач используются конечные интегральные преобразования, которые являются наиболее общей формой метода неполного разделения переменных и позволяют построить замкнутые решения. Построенные расчетные соотношения реализованы в среде Mathcad–14 в виде программного комплекса.

Научная новизна состоит в создании новой методики расчета многослойных биморфных пьезокерамических преобразователей резонансного и нерезонансного классов постоянной, а также ступенчато переменной толщины.

В работе представлены следующие новые научные результаты:

1. Разработана математическая модель расчета многослойных симметричных и асимметричных биморфных круглых пластин постоянной толщины;
2. Построены новые замкнутые решения связанных нестационарных осесимметричных задач прямого и обратного пьезоэффектов в трехмерной постановке;
3. При использовании прикладной теории Тимошенко разработана математическая модель и построено новое замкнутое решение для асимметричной биморфной круглой пластины ступенчато переменной толщины;
4. На основании проведенных исследований в среде Mathcad–14 разработано программное обеспечение, позволяющее получить численные результаты расчета, и в результате их анализа научно обосновать оптимальное конструктивное решение многослойных пьезокерамических

преобразователей, связанное с наиболее эффективным преобразованием внешнего электромеханического воздействия.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью, в рамках сформулированных допущений, математической постановки и методами решения рассматриваемых нестационарных задач электроупругости, совпадением в частных случаях представленных решений с известными результатами, соответствием качественных результатов расчета с полученными автором работы экспериментальными данными, а также с физической картиной исследуемых процессов.

Практическая значимость работы определяется возможностью использования разработанных алгоритмов построенных решений и созданного программного комплекса при проектировании пьезокерамических многослойных преобразователей. Полученные результаты позволяют обосновать рациональную программу экспериментов, что значительно сокращает объем дорогостоящих натурных исследований.

Представленная методика расчета биморфных пластин нашла применение при проектировании тонкостенных многослойных элементов выполняемым ООО «Интеб» (датчик DP-612.5). Кроме того, результаты работы используются в учебном процессе при подготовке магистрантов СамГТУ по направлению «Строительство» и профилю образования «Теория сооружений» при изучении дисциплины «Взаимодействие упругих элементов конструкции сопряженными полями гидроупругости, термоупругости, электроупругости».

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Новая математическая модель расчета многослойных сплошных биморфных пьезокерамических пластин при действии электромеханической нагрузки.

2. Новые замкнутые решения связанных динамических задач для биморфных пластин постоянной толщины.

3. Прикладная методика расчета биморфных асимметричных пластин ступенчато переменной толщины и жесткости.

4. Численный анализ электромеханических процессов в многослойных биморфных конструкциях постоянной и ступенчато переменной толщины.

Апробация результатов исследования. Основные результаты работы были представлены и обсуждены на 74–76-х Международных научно-технических конференциях (2017–2019, СамГТУ), X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (СамГТУ, 2017), XI Всероссийская научная конференция с международным участии-

ем «Математическое моделирование и краевые задачи» (СамГТУ, 2019), Международной научно-технической конференции «Пром-Инжиниринг» (Москва, 2018), Международных научных Российско-польско-словацких семинарах XXIII R-S-P (2014), XXV R-S-P (2016), XXVII R-S-P (2018) и XXVIII R-S-P (2019).

Полностью диссертация была представлена: на семинаре кафедры «ПМиИ» СамГТУ (зав.каф. Радченко В.П., д.ф.-м.н., профессор), на расширенном семинаре кафедры «СМиСМ» СамГТУ АСА (зав.каф. Шляхин Д.А., д.т.н., доцент).

Публикации. По результатам данного исследования опубликовано 14 научных работ, в том числе 8 статей в журналах, рекомендованных ВАК России, из которых 4 работы в изданиях, входящих в библиографическую базу данных Scopus, Web of Science.

Вклад автора заключается в построение новых замкнутых решений, рассматриваемых начально–краевых задач электроупругости, в проведение экспериментальных исследований по определению частот собственных колебаний биморфных пластин, в разработке программных комплексов по реализации полученных расчетных соотношений и анализу численных результатов расчета.

Объем и структура диссертации: Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка используемой литературы и 2 приложений, общим объемом 118 страниц машинописи, 37 рисунков, 3 таблицы. Список литературы содержит 119 наименований.

В первой главе проведен анализ литературы, посвященный решению начально–краевых задач электроупругости для сплошных и многослойных пластин.

Во второй главе рассматриваются связанные динамические осесимметричные задачи обратного пьезоэффекта для биморфных пластин постоянной толщины и строятся замкнутые решения.

В третьей главе исследуются связанные нестационарные задачи прямого пьезоэффекта для многослойных асимметричных биморфных пластин постоянной толщины.

В четвертой главе на основании прикладной теории Тимошенко построено новое замкнутое решение для двухслойной электроупругой асимметричной конструкции ступенчато переменной толщины.

На основании проведенных исследований и анализа численных результатов расчета в каждой главе сформулированы практические рекомендации, которые могут использоваться при проектировании тонких круглых пьезокерамических преобразователей энергии.

В заключение диссертации сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Приложения 1,2 содержат соответственно акт внедрения результатов, а также распечатку типовой программы в системе Mathcad-14, полученной на основании построенных алгоритмов.

Благодарности: Автор выражает благодарность научному руководителю доктору технических наук Д.А. Шляхину за постановку задачи и поддержку работы.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость результатов. Формируются основные положения, выносимые на защиту, приводится структура диссертационной работы и сведения о публикациях автора.

В первой главе представлены области применения конструкций, использующих в своей работе связанность электроупругих полей напряжения: гидро- и ультразвуковая электроника, микроэлектроника, электромеханические преобразователи, радиолокационные устройства, компьютерная техника.

Проведен анализ научной литературы по теме диссертации, позволяющий сделать вывод, что большинство решений начально – краевых задач электроупругости получено с помощью прикладных теорий для тонких пластин. На основании выполненного обзора сформулирована актуальность диссертации и поставлена задача исследования, связанная с созданием уточненных моделей расчета и построением замкнутых решений в трехмерной постановке, позволяющих описать сложные нестационарные процессы в многослойных пьезокерамических конструкциях.

Во второй главе рассматриваются нестационарные осесимметричные задачи обратного пьезоэффекта для сплошных биморфных пластин. Исследуется конструкция толщиной h^* , состоящая из двух жестко соединенных пьезокерамических пластин ($h^* = 2h_1^*$), а также многослойная система ($h^* = 2h_1^* + h_2^*$), которая включает металлическую подложку (h_2^*) с прикрепленными к ней с двух сторон электроупругими пластинами. Материал пьезокерамических пластин аксиально поляризован и имеет кристаллическую решетку гексагональной симметрии класса 6mm. Изгибные колебания образуются в результате подключения торцевых элек-

тродированных поверхностей пьезопластин к источнику электрического напряжения $V^*(r_*, t_*)$, который является произвольной функцией радиальной координаты r_* и времени t_* . Цилиндрические поверхности конструкции могут быть закреплены произвольно. Для определенности принимаем их жестко (рис. 1а) и шарнирно (рис. 1б) закрепленными.

В цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) , рассматриваемые электроупругие пластины, занимают область $\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi,$

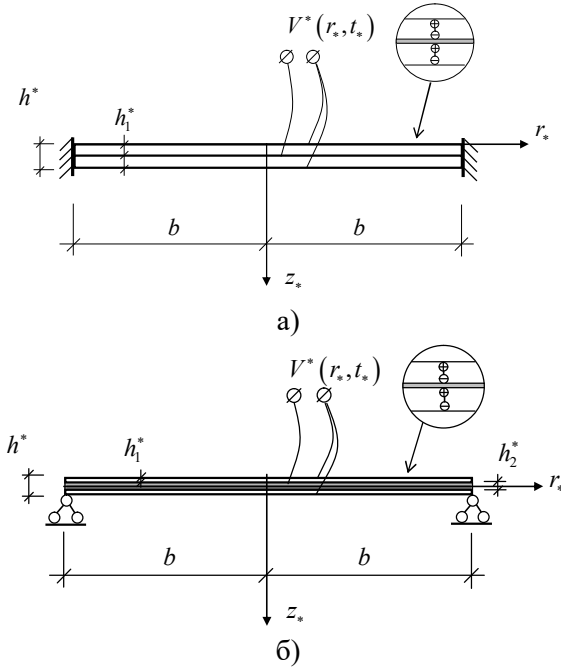


Рис. 1 Расчетные схемы биморфных пластин

$0 \leq z_* \leq h^* \}$. В общем случае дифференциальные уравнения осесимметричного движения, а также электростатики однородной упругой анизотропной среды и безразмерной форме имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{C_{33}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial}{\partial z} \nabla U + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \frac{\partial}{\partial z} \nabla U + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

где $\{U, W, r, z\} = \{U^*, W^*, r, z\} / b$, $\phi = \phi^* e_{33} / (b C_{11}^{(1)})$, $t = t_* b^{-1} \sqrt{C_{11}^{(1)} / \rho^{(1)}}$, $U^*(r_*, z_*, t_*)$, $W^*(r_*, z_*, t_*)$, $\phi^*(r_*, z_*, t_*)$ – компоненты вектора перемещений и потенциал электрического поля в размерной форме; e_{mk} , ε_{11} , ε_{33} – пьезомодули и коэффициенты диэлектрической проницаемости электроупругого материала ($m, k = \overline{1, 5}$); $\rho^{(s)}$, $C_{mk}^{(s)}$ – объемная плотность и модули упругости электроупругого ($s=1$) и упругого ($s=2$) материалов; $\Phi^{(1)} = 1$, $\Phi^{(2)} = \frac{C_{11}^{(2)} \rho^{(1)}}{C_{11}^{(1)} \rho^{(2)}}$, $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$.

При исследовании упругой среды ($s=2$) система (2.1) включает только уравнения движения, сформулированные относительно компонент вектора перемещений.

Граничные условия рассматриваемых задач (рис.1) в безразмерной форме имеют вид:

$$r = 0, 1 \quad W(0, z, t) < \infty, \quad U(0, z, t) < \infty, \quad \phi(0, z, t) < \infty, \quad (2.2)$$

$$D_{r|r=1} = -\frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{e_{15}}{e_{33}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0;$$

$$z = 0, h \quad \sigma_{zz} = \frac{C_{13}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \phi(r, z, t) = V(r, t) / 2;$$

– жесткое закрепление (рис.1, а):

$$r = 0, 1 \quad U(1, z, t) = 0, \quad W(1, z, t) = 0; \quad (2.4)$$

$$z = h_1 \quad \left(\frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{|z=0} = \left(\frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{|z=0}, \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{|z=0} = \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{|z=0},$$

$$U(z+0)=U(z-0), \quad W(z+0)=W(z-0), \quad \phi(z+0)=\phi(z-0)=-V(r,t)/2;$$

–шарнирное закрепление (рис.1, б):

$$r=0,1 \quad \sigma_{rr}|_{r=1} = \frac{C_{11}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{C_{12}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{U}{r} + \frac{C_{13}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{e_{31}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (2.6)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0;$$

$$z=h_1, h_1+h_2 \quad \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (2.7)$$

$$\frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right),$$

$$U(z+0)=U(z-0), \quad W(z+0)=W(z-0), \quad \phi(z+0)=\phi(z-0)=-V(r,t)/2.$$

Начальные условия записываются следующим образом:

$$t=0 \quad U(r,z,0)=U_0(r,z), \quad W(r,z,0)=W_0(r,z), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial U(r,z,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_0(r,z), \quad \frac{\partial W(r,z,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(r,z).$$

где $\{h, h_1, h_2\} = \{h^*, h_1^*, h_2^*\} / b$, σ_{pm} – компоненты тензора напряжений ($p, m=r, z$); D_r, D_z – компоненты вектора индукции электрического поля; $U_0^*, \dot{U}_0^*, W_0^*, \dot{W}_0^*$ – известные в начальный момент времени перемещения и их скорости перемещений, $V = V^* e_{33} / (bC_{11}^{(1)})$.

Выражения (2.2) при $r=0$ являются условиями ограниченности решения в центре пластины, а равенство $D_r|_{r=1} = 0$ учитывает отсутствие электродного покрытия на цилиндрической поверхности пластины. Формулы (2.5), (2.7) позволяют удовлетворить условия совместности напряжений и перемещений в плоскости жесткого соединения элементов конструкции. Электрическая нагрузка в виде потенциала электрического поля учитывается в последних равенствах (2.3), (2.5), (2.7).

В п.2.1.2 и п.2.2.2 представлен алгоритм общего решения, рассматриваемых задач, в котором последовательно используются методы интегральных преобразований: Ханкеля с конечными пределами по радиальной переменной r и обобщенное конечное интегральное преобразование (КИП) по аксиальной координате z .

При этом на каждом этапе решения выполняется стандартизация граничных условий, т. е. приведение их к виду, позволяющему выполнить

соответствующую процедуру разделение переменных. Для этого, при жестком закреплении пластины, последнее равенство (2.4) заменяется условием наличия касательных напряжений $N_1(z, t)$:

$$\sigma_{rz}|_{r=1} = N_1(z, t), \quad (2.9)$$

а при шарнирном ее закреплении, вместо последних равенств (2.2), (2.6), используются следующие выражения:

$$W(1, z, t) = W_1(z, t), \quad \phi(1, z, t) = \phi_1(z, t). \quad (2.10)$$

В результате формируются новые краевые задачи, в которых на исследуемые конструкции действует известная электрическая нагрузка и неизвестные внешние воздействия N_1, W_1, ϕ_1 , определяемые в процессе решения задач.

Процедура приведения неоднородных граничных условий (2.9), (2.10) к однородным с помощью разложений

$$\{U, W, \phi\} = \{A_1, A_2, A_3\} + \{u, w, \chi\}, \quad (2.11)$$

позволяет сформулировать краевые задачи относительно функций u, w, χ при следующих смешанных граничных условиях на цилиндрической поверхности пластины:

– жесткое закрепление: $U(1, z, t) = 0$, $\frac{\partial w}{\partial r}|_{r=1} = 0$, $\frac{\partial \chi}{\partial r}|_{r=1} = 0$.

– шарнирное закрепление: $w(1, z, t) = 0$, $\nabla u|_{r=1} = 0$, $\phi(1, z, t) = 0$.

где $A_1 \dots A_3$ – стандартизирующие функции.

Последовательное применение конечного интегрального преобразования Ханкеля:

$$u_H(j_n, z, t) = \int_0^1 U(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \quad (2.12)$$

$$\{w_H(j_n, z, t), \phi_H(j_n, z, t)\} = \int_0^1 \{w(r, z, t), \chi(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr,$$

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(j_n, z, t)}{S(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (2.13)$$

$$w(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_H(j_n, z, t)}{S(j_n)^2} J_0(j_n r), \quad \chi(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_H(j_n, z, t)}{S(j_n)^2} J_0(j_n r).$$

и обобщенного метода КИП с неизвестными компонентами $K_1(\lambda_n, z)$, $K_2(\lambda_n, z)$, $K_3(\lambda_n, z)$ вектор– функции ядра преобразований

$$G(\lambda_n, n, t) = \int_0^h (U_H K_{1in} + W_H K_{2in}) dz, \quad (2.14)$$

$$\{U_H, W_H, \chi_H\} = \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} \{K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}\} \|K_{in}\|^{-2}, \quad \|K_{in}\|^2 = \int_0^h (K_{1in}^2 + K_{2in}^2) dz, \quad (2.15)$$

позволяет получить выражения для функций $U(r, z, t)$, $W(r, z, t)$, $\phi(r, z, t)$:

$$U(r, z, t) = A_1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_0(j_n)^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[S_1 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{1in} \|K_{in}\|^2 \right] J_1(j_n r), \quad (2.16)$$

$$W(r, z, t) = A_2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_0(j_n)^{-2} \left[S_2 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{2in} \|K_{in}\|^2 \right] J_0(j_n r),$$

$$\phi(r, z, t) = A_3 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_0(j_n)^{-2} \left[S_3 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{3in} \|K_{in}\|^2 \right] J_0(j_n r),$$

В равенствах (2.12)–(2.16) используются следующие обозначения: j_n – положительные нули функций $J_1(j_n)$, $J_0(j_n)$, соответственно при жестком ($S(j_n) = J_0(j_n)$) и шарнирном ($S(j_n) = J_1(j_n)$) закреплении пластины; λ_n – положительные параметры, образующие счетное множество; $S_1 \dots S_3$ – вспомогательные функции позволяющие привести неоднородные граничные условия по переменной z к однородным.

Решение задач в первом приближении при действии только электрической нагрузки $V(r, t)$ ($N_1 = W_1 = \phi_1 = 0$) позволяет определить выражения для функций N_1, W_1, ϕ_1 . В дальнейшем происходит уточнение расчета из условия удовлетворения последних краевые условия (2.2), (2.4), (2.6).

В качестве примера в п.2.1.3 и п.2.2.3 рассматриваются биморфные пластины ($b = 14 \times 10^{-3}$ м) изготовленные из пьезокерамики состава ЦТС–19 и металлической подложки, выполненной из различных сплавов.

В таблице приведены численные значения первых трех частот собственных осесимметричных колебаний ω_{in} ($i = 1, n = 1, 2, 3$) жестко закрепленных пластин различной толщины h^* ($\omega_{in} = \lambda_{in} b^{-1} \sqrt{C_{11}^{(1)} / \rho^{(1)}}$). Верхние числа относятся к спектру частот для упругой пластины, модули упругости которой соответствуют пьезокерамическому материалу, а нижние – для рассматриваемой биморфной конструкции (рис.1а).

Полученные результаты подтверждают известный факт, что наличие электрического поля приводит к созданию более жесткой системы и увеличению численных значений спектра частот.

Таблица 1

$h_1^*, \text{ м}$	$\omega_{1n} \times 10^{-3}, \text{ Гц}$		
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0.25×10^{-3}	$\frac{5.46}{5.59}$	$\frac{18.2}{18.6}$	$\frac{37.8}{38.6}$
	$\frac{10.8}{11.1}$	$\frac{35.3}{36.0}$	$\frac{70.1}{72.5}$

Для определения частот собственных осесимметричных колебаний биморфных пластин был также проведен натурный эксперимент, который показал хорошее совпадение полученных численных значений ω_{11} с теоретическими данными (разница составляет не более 10%).

Вынужденные колебания биморфной пластины исследуются в случае действия электрической нагрузки $V(r, t)$:

$$V(r, t) = V_0(r) \sin \beta t,$$

где $V_0(r), \beta$ – амплитудное значение и частота вынужденных колебаний в безразмерной форме.

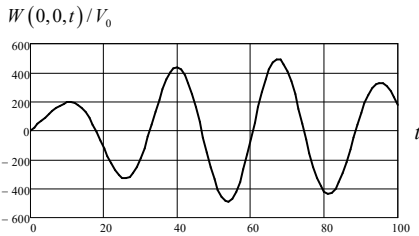
Рассматривался случай работы конструкции ($h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м) на первой резонансной частоте ($\beta \leq \lambda_{11}$). В этом случае для эффективной работы преобразователя при жестком его закреплении необходимо использование двух электродов на торцевых поверхностях пьезопластин с радиусом раздела $R_1 = 0.628$ и подключением их в противофазе

$$V_0(r) = V_0 [H(R_1 - r) - H(r - R_1)],$$

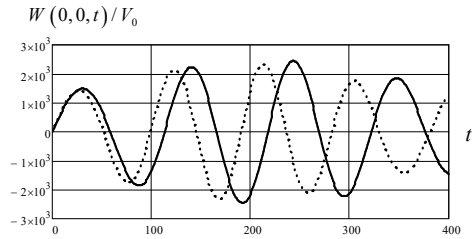
а в случае шарнирного закрепления – сплошное электродное покрытие $V_0(r) = V_0 (H(\dots))$ – единичная функция Хэвисайда).

На рисунке 2 показаны графики изменения аксиальной компоненты вектора перемещений $W(0, z, t)$ во времени t при использовании высокочастотной нагрузки ($\beta = 0.8\lambda_{11}$). Полученные результаты показывают, что вследствие наложения волн деформирования наблюдается сложная зависимость изменения перемещений, поэтому в рассматриваемых зада-

чах нельзя использовать, обычно применяемое, допущение об установившемся режиме вынужденных колебаний.



а) жесткое закрепление



б) шарнирное закрепление ($h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м)

Рис.2. Графики изменения $W(0,0,t)$ по времени t (рис.б: сплошная линия – дюралюминиевая подложка, пунктирная – из латуни)

На рисунке 3 приведены графики изменения амплитудных значений составляющих электрического поля в биморфной конструкции (рис.1а). Их анализ позволяет сделать вывод о том, что при расчете тонких пьезо-керамических пластин с помощью прикладных теорий радиальными компонентами (рис.3,б) электрического поля можно пренебречь, поскольку их численные значения существенно меньше аксиальных составляющих (рис.3,а).

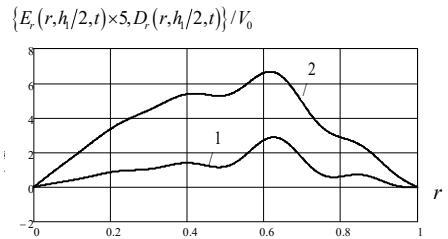
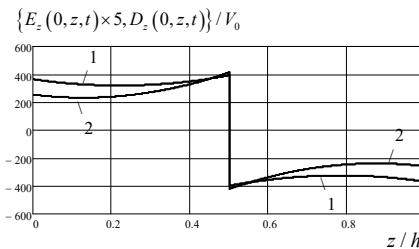


Рис.3. Графики изменения амплитудных значений напряженности и индукции электрического поля по пространственным переменным ($h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м, 1– E_z , 2– D_z)

Следует отметить, что в преобразователях обратного пьезоэффекта, уменьшение толщины пьезокерамических пластин приводит к понижению их жесткости, увеличению напряженности E_z электрического поля и результате к повышению чувствительности прибора. Однако здесь необходимо учитывать факт деполяризация пьезокерамического материала

при больших значениях E_z . Кроме того, в этом случае конструкция становится очень хрупкой и именно поэтому для повышения ее прочности используется металлическая подложка (рис.1б).

В главе 3 рассматривается динамическая осесимметричная задача прямого пьезоэффекта для круглой двухслойной биморфной конструкции, состоящей из металлической подложки и пьезокерамической аксиально поляризованной пластины. Ее изгибные колебания осуществляются за счет действия на лицевой поверхности механической нагрузки (нормальных напряжений). Подключение электродного покрытия, расположенного на лицевых поверхностях пьезокерамических пластин, к измерительному прибору позволяет зафиксировать величину и форму электрического напряжения $V^*(t_*)$. Рассматриваются случаи шарнирного и жесткого закрепления цилиндрической поверхности конструкции (рис.4).

В общем случае математическая формулировка рассматриваемой задачи включает равенства аналогичные (2.2)–(2.10). Здесь необходимо только учесть условие отсутствия электрической нагрузки (последние равенства (2.3), (2.5), (2.7)) и действие механической нагрузки:

$$\sigma_{zz|z=0} = q^*(r, t). \quad (3.1)$$

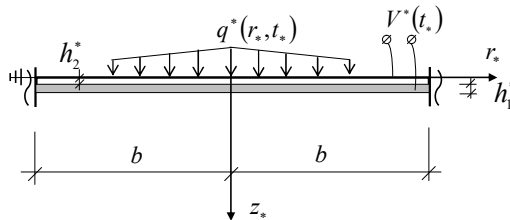


Рис.4. Расчетная схема биморфной пластины

В результате использования разработанного во 2 главе диссертации алгоритма расчета определяются компоненты вектора перемещения и потенциал электрического поля.

Численные результаты расчета (п.3.1.3) получены для электроупругой системы ($b = 3 \times 10^{-2}$ м), состоящей из пьезокерамической пластины состава ЦТС–19 и подложки, выполненной из латуни.

Полученные результаты показывают, что при жестком закреплении конструкции, для регистрации разности потенциалов $V(t)$, на нижней лицевой поверхности пьезокерамической пластины необходимо исполь-

зовать два несвязанных между собой электрода ($R_1 = 0.628$), а при шарнирном закреплении сплошное электродное покрытие. Кроме того, при жестком заземлении пластины необходимо механическую нагрузку прикладывать на части ее поверхности: $q(r) = q_0 H(r - 0.5)$, что приводит к увеличению разности потенциалов $V(t)$ по сравнению с вариантом приложения нагрузки на всей поверхности ($q(r) = q_0$). Данный факт объясняется большей степенью сжатия пьезокерамической пластины по толщине в первом случае загрузки.

На рисунках 5 показаны графики изменения амплитудных значений разности потенциалов $V(t)$ для пьезокерамической пластины различной толщины. Данные зависимости, для конструкции с заданной толщиной подложки, позволяют определить оптимальную высоту пьезокерамической пластины, наиболее эффективно преобразующую внешнее механическое воздействие в электрический сигнал. В частности для металлической подложки толщиной $h_2^* = 0.5 \times 10^{-3}$ (м) необходимо использовать пьезокерамическую пластину толщиной $h_1^* = (0.8 \div 0.85) \times 10^{-3}$ (м).

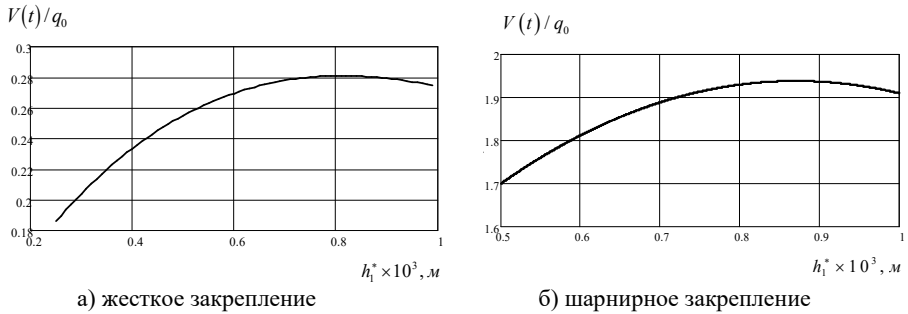


Рис.5. Зависимость амплитудных значений $V(t)$ от толщины пьезокерамической пластины h_1^* (м) при толщине подложки $h_2^* = 0.5 \times 10^{-3}$ (м) ($\beta = 0.8\lambda_{11}$).

Глава 4 посвящена анализу работы биморфной пластины состоящей из металлической подложки и пьезокерамической пластины меньшего диаметра (рис.6). Данное конструктивное решение приводит, по сравнению с работой сплошной двухслойной системой, к понижению жесткости электроупругой системы и увеличению амплитудных значений индуцируемого электрического импульса.

Исследование конструкции ступенчато переменной толщины проводится на основании прикладной теории Тимошенко для тонких пластин, в которой кинематические гипотеза дополнены допущением о характере распределения электрического поля. При этом наличие асимметричного по высоте сечения приводит к необходимости анализа связанных мембранных и изгибных колебаний.

В цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) расположение приведенной поверхности $z = 0$ определяется из условия учета всех инерционных характеристик в двухслойной части конструкции при построении замкнутого решения.

Использование кинематических гипотез

$$U^*(r_*, z, t_*) = U_0^*(r_*, t_*) - z\psi(r_*, t_*), \quad W^*(r_*, z, t_*) = W^*(r_*, t_*), \quad (4.1)$$

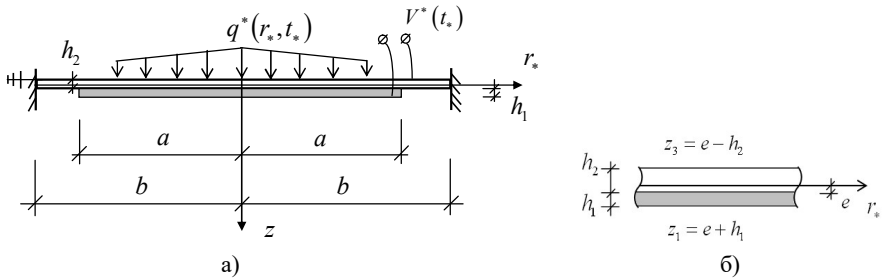


Рис.6. Расчетная схема биморфной конструкции ступенчато переменной толщины

$$(e = 0.5(\rho^{(2)}h_2^2 - \rho^{(1)}h_1^2)(\rho^{(2)}h_2 + \rho^{(1)}h_1)^{-1})$$

допущения о характере распределения электрического поля из условия отсутствия тока смещения $D_{z|z=h_1+e} = 0$ на внешнем электроде

$$E_z(r_*, z, t_*) = -e_{31}\epsilon_{33}^{-1}\nabla U^*, \quad (4.2)$$

и интегральных характеристик напряженного состояния конструкции позволяет получить следующую систему дифференциальных уравнений движения и краевые условия в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} p_1 \frac{\partial}{\partial r} \nabla U_0 - p_2 \frac{\partial}{\partial r} \nabla \psi - p_3 \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} &= 0, \\ p_4 \left(\nabla \frac{\partial W}{\partial r} - \nabla \psi \right) - p_3 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= q, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$p_5 \frac{\partial}{\partial r} \nabla \psi + p_6 \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \psi \right) - p_2 \frac{\partial}{\partial r} \nabla U_0 - p_7 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

$$r = 1, 0 \quad U_0(1, t) = 0, \quad W(1, t) = 0, \quad \psi(1, t) = 0, \quad (4.4)$$

$$U_0(0, t) < \infty, \quad W(0, t) < \infty, \quad \psi(0, t) < \infty,$$

$$t = 0 \quad U_0(r, 0) = u_0(r), \quad W(r, 0) = W_0(r), \quad \psi(r, 0) = \psi_0(r),$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{u}_0(r), \quad \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(r), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\psi}(r), \quad (4.5)$$

где $\{W, U_0, r, R\} = \{W^*, U_0^*, r_*, a\} / b$, $q = p_8^{-1} q^*$, U_0^* – радиальные перемещения приведенной поверхности, W^*, ψ – аксиальные перемещения и угол поворота сечения, $p_1 \dots p_8$ – постоянные, учитывающие электроупругие свойства материалов и толщину элементов конструкции.

Электрическое напряжение $V^*(t_*)$ определяется в результате интегрирования равенства (4.2) и учета заземления подложки:

$$V^*(t_*) = \frac{e_{31}}{\varepsilon_{33}} \frac{h_1}{a} \left[2U_0^*(a, t_*) - (h_1 + 2e)\psi(a, t_*) \right]. \quad (4.6)$$

При построении общего решения краевой задачи (4.3) – (4.5) используется КИП с неизвестными компонентами $K_1(\lambda_i, r)$, $K_2(\lambda_i, r)$, $K_3(\lambda_i, r)$ вектор – функции ядра преобразования и весовыми функциями α, β, γ :

$$G(\lambda_i, t) = \int_0^1 \left[\alpha U_0(r, t) K_1(\lambda_i, r) + \beta W(r, t) K_2(\lambda_i, r) + \gamma \psi(r, t) K_3(\lambda_i, r) \right] r dr, \quad (4.7)$$

$$\{U_0(r, t), W(r, t), \psi(r, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \{K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r), K_3(\lambda_i, r)\} \|K_i\|^{-2}, \quad (4.8)$$

$$\|K_i\|^2 = \int_0^1 \left[\alpha K_1^2(\lambda_i, r) + \beta K_2^2(\lambda_i, r) + \gamma K_3^2(\lambda_i, r) \right] r dr.$$

Подвергая систему уравнений и краевые условия преобразования КИП (4.7) в соответствии со структурным алгоритмом, получаем выражения для компонент $K_1 \dots K_3$ и трансформанты G , весовые функции α, β, γ , а также постоянные интегрирования и собственные значения λ_i .

Выражения для функций $U_0(r, t)$, $W(r, t)$, $\psi(r, t)$ получаются в результате использования формул обращения (4.8).

В качестве примера рассматривается биморфная конструкция, состоящая из металлической подложки из латуни и пьезокерамической пластины состава ЦТС-19.

Рассматривается случай действия гармонической нагрузки:

$$q(r, t) = q_0 (1 - r) \sin \chi t,$$

где q_0, χ — амплитудное значение интенсивности нагрузки и частота вынужденных колебаний в безразмерной форме.

На рисунке 7 показаны зависимости изменения амплитудных значений разности потенциалов $V^*(t)$ при различных геометрических размерах пьезокерамической пластины. Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы, что для заданной металлической подложки ($b = 3 \times 10^{-2}$ м, $h_2 = 0.5 \times 10^{-3}$ м) можно подобрать геометрические размеры пьезокерамической пластины, позволяющие наиболее эффективно преобразовать механическую нагрузку в электрический импульс. В частности, в данном примере необходимо использовать следующие параметры $R = a/b = 0.62$, $h_1 = 0.9 \times 10^{-3}$ (м).

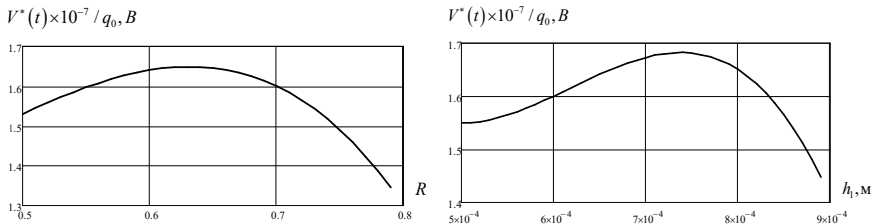


Рис.7. Зависимость амплитудного значения $V^*(t)$ от радиуса R и толщины пьезокерамической пластины h_1 ($\chi = 0.2\lambda_1$)

Следует отметить, что в общем случае разработанный алгоритм может быть использован для расчета биморфных пластин ступенчато переменной толщины с произвольным количеством электроупругих слоев, асимметричных относительно приведенной поверхности.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы:

1. Разработана методика расчета многослойных круглых биморфных пластин, позволяющая с помощью базовых расчетных соотношений описать их работу в случае действия нестационарной осесимметричной силовой и электрической нагрузок;

2. Построены новые замкнутые решения динамических связанных задач электроупругости для биморфных симметричных и асимметричных пластин постоянной толщины;

3. На основании модели Тимошенко для тонких элементов представлена математическая модель расчета и построено замкнутое решение для асимметричной биморфной пластины ступенчато переменной толщины;

4. Разработано программное обеспечение, позволяющее проводить анализ связанных электроупругих процессов в типовых круглых многослойных преобразователях энергии;

5. Создана экспериментальная установка по определению частот собственных осесимметричных колебаний круглых пьезокерамических пластин;

6. Разработаны практические рекомендации по подбору геометрических размеров и материалу биморфных преобразователей, которые могут быть использованы при их проектировании.

7. Представленная методика расчета биморфных пластин нашла применение при проектировании тонкостенных многослойных элементов выполняемым ООО «Интеб». Кроме того, данные внедрены в учебный процесс при подготовке магистрантов по направлению «Строительство».

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ:

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК России

1. Ратманова О.В., Нестационарная задача прямого пьезоэффекта для асимметричной биморфной круглой пластины ступенчато переменной толщины. Научный электронный журнал. Сетевое издание. Вестник ИШ ДВФУ.– 2019. – № 2 (39). – С.13-22. DOI:10.24866/2227-6858/2019-2-2

2. Шляхин Д.А., Ратманова О.В., Оптимальное конструктивное решение круглых многослойных биморфных пластин. Инженерный журнал: наука и инновации. «Электрон. научно–технич. издание». Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2019. – №1 (85). – С.1-15. DOI:10.18698/2308-6033-2019-1-1844.

3. Шляхин Д.А., Ратманова О.В., Оптимальный выбор геометрических размеров круглых биморфных пьезокерамических пластин. Вестник Башкирского университета. – 2019. – Т. 24, №1. С.22-29

4. Шляхин Д.А., Ратманова О.В., Вынужденные осесимметричные колебания круглых многослойных биморфных пластин. Вестн. Сам. гос. техн. ун–та. Сер. Физ.–мат. науки. – 2017. – №4. – С.773–785.

Публикации в журналах, входящие в библиографическую базу SCOPUS, WOS

1. Shlyakhin D.A., Ratmanova (Kazakova) O.V. Non-stationary flexural fluctuations of a round flat bimorph plate with graded-varying thickness. *Procedia engineering*. Изд.: Elsevier BV. – 2014. – Vol. 91. – P.69-74. DOI:10.1016/j.proeng.2014.12.014
2. Shlyakhin D.A., Ratmanova (Kazakova) O.V. A dynamic axially symmetric goal and its extended solution for a fixed rigid circular multi-layer plate. *Procedia engineering*. Изд.: Elsevier BV. – 2016. – Vol.153. – P.662-666. DOI:10.1016/j.proeng.2016.08.219
3. Shlyakhin D.A., Ratmanova O.V. The task of direct piezoeffect for a bimorph plate. *MATEC Web of Conferences, XXVII R-S-P Seminar 2018, Theoretical Foundation of Civil Engineering*. Изд.во EDP Sciences. – 2018. – Vol.196. DOI:10.1051/mateconf/201819601006.
4. Shlyakhin D.A., Ratmanova O.V. Dynamic Problem of Direct Piezoelectric Effect for the Circular Multilayer Plate. *Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. – 2019. – P.89-97. DOI:10.1007/978-3-319-95630-5_9

Публикации в сборниках научных трудов и тезисы докладов

1. Шляхин Д.А., Ратманова (Казакова) О.В., Forced axisymmetric vibrations of thin circular plate of stepwise variable thickness and stiffness. *Математические методы и модели в строительстве, архитектуре и дизайне. СГАСУ. Самара*. – 2015. – С.117-122.
2. Шляхин Д.А., Ратманова (Казакова) О.В., Подбор геометрических размеров ультразвукового пьезокерамического преобразователя. *Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Естественные науки и техносферная безопасность. СГАСУ. Самара*. – 2016. – С.211-216.
3. Шляхин Д.А., Ратманова О.В., Вынужденные осесимметричные колебания круглых многослойных биморфных пластин. *Механика деформируемого твердого тела: сборник трудов IX Всероссийской конференции СамГТУ*. – 2017. – С.287-290.
4. Шляхин Д.А., Ратманова О.В., Нестационарная задача обратного пьезоэффекта для многослойной пластины. *Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Естественные науки и техносферная безопасность. АСА СамГТУ*. – 2017. – С.187-191.
5. Ратманова О.В., Связанная динамическая задача для круглой жестко закрепленной биморфной пластины. *Традиции и инновации в строитель-*

стве и архитектуре. Естественные науки и техносферная безопасность. АСА СамГТУ. – 2018. – С. 231-236.

6. Ратманова О.В., Нестационарная осесимметричная задача теории электроупругости для асимметричной биморфной пластины ступенчато переменной толщины. Материалы XI Всероссийской научной конференции с между- народным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия): в 2-х томах. Т. 1. / под ред. В. П. Радченко. — Самара: СамГТУ.– 2019. – С.158-161.

Научное издание

Ратманова Олеся Викторовна

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук на тему:

Связанные осесимметричные задачи динамики для круглых биморфных пьезокерамических пластин

Подписано в печать « » _____ 2019 г.

Формат 60 x 90 1/16. Набор компьютерный.

Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ 761.

Отпечатано на ризографе.

ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»

Отдел типографии и оперативной печати

443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.