

На правах рукописи



**Кузнецова Юлия Сергеевна**

**МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОГРУЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ  
ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА КАСТИЛЬЯНО И ЕГО ЧИСЛЕННАЯ  
РЕАЛИЗАЦИЯ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Пермь – 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» (ПНИПУ).

Научный руководитель: **Шардаков Игорь Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты: **Шешенин Сергей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО "Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова", профессор кафедры теории пластичности (г. Москва).

**Вахрушев Александр Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Институт механики ФГБУН "Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН", главный научный сотрудник лаборатории механики наноструктур (г. Ижевск).


Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Тульский государственный университет", г. Тула.

Защита состоится **26 июня 2018 г.** в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 004.036.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук (филиал – Институт механики сплошных сред УрО РАН) по адресу: 614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1; тел: (342) 237-84-61; факс: (342) 237-84-87; сайт: [www.icmm.ru](http://www.icmm.ru).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » мая 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук, доцент

 / А.Л. Зуев

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Постановка краевой задачи теории упругости традиционно может быть выполнена в перемещениях или в напряжениях, что при использовании вариационной формулировки подразумевает применение соответственно принципа минимума общей потенциальной энергии системы (принципа Лагранжа) и принципа минимума дополнительной работы (принципа Кастильяно). Приближенные и численные методы теории упругости, такие как метод конечных элементов (МКЭ), вариационно-разностный метод, реализующие экстремальные принципы, в большинстве случаев базируются на формулировке в перемещениях, как более удобной с точки зрения выбора базисных функций, к которым предъявляются достаточно просто удовлетворяемые требования кинематической допустимости. Известные недостатки численных решений в перемещениях заключаются в низкой точности определения полей деформаций и напряжений, проблемы с анализом слабосжимаемых материалов, невозможности расчета несжимаемых тел. Поэтому достаточно широкое развитие получили различные смешанные формулировки на основе вариационных принципов Рейсснера, Ху-Вашизу и др., более сложные в реализации, но, в известной степени, свободные от указанных недостатков.

Приближенные и численные решения в напряжениях на основе вариационного принципа Кастильяно нашли достаточно ограниченное применение, прежде всего из-за проблем с построением базисных функций, которые в данной формулировке должны быть статически допустимыми: удовлетворять в области уравнениям равновесия и статическим граничным условиям. В основном получены решения таких задач теории упругости в канонических по форме областях, соответственно, построены простые по форме конечные элементы в напряжениях.

Существует ряд методов сведения краевой задачи теории упругости для области произвольной формы к задаче на канонической области: метод фиктивных областей, метод малых возмущений формы, метод фиктивных канонических областей, метод геометрического погружения<sup>1</sup> и др. Формулировка метода геометрического погружения (МГП) ранее дана в перемещениях, предложены эффективные алгоритмы реализации методами конечных и граничных элементов, вариационно-разностным методом.

МГП представляется перспективным, как основа для решения задач теории упругости в напряжениях, сформулированных на областях сложной конфигурации, поскольку позволяет эффективно использовать имеющиеся решения и наработки для областей канонической формы. Привлекательность данного подхода связана с принципиальной возможностью получения полей напряжений при численной реализации МГП с более высокой точностью, решения задач для несжимаемых и слабосжимаемых материалов. Кроме того,

---

<sup>1</sup> Шардаков И.Н., Труфанов Н.А., Матвеев В.П. Метод геометрического погружения в теории упругости. - РАН УрО, Екатеринбург, 1999, 298 с.

получение решения задачи в перемещениях и в напряжениях позволяет построить вариационные нижнюю и верхнюю границы, в которых гарантировано лежит точное решение задачи.

Таким образом, разработка новых численных методов теории упругости, позволяющих более точно исследовать напряженное состояние сложных по форме конструкций и узлов, имеющих важное практическое значение, является **актуальной** задачей.

**Цель работы:** обобщение метода геометрического погружения на класс задач теории упругости в напряжениях и разработка численного алгоритма реализации на основе вариационного принципа Кастильяно.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- Разработать основные теоретические положения метода геометрического погружения в напряжениях.
- Доказать сходимость итерационной процедуры МГП.
- Построить дискретные аналоги вариационного уравнения МГП с помощью метода конечных элементов в напряжениях, метода Ритца.
- Реализовать и исследовать практическую сходимость МГП в напряжениях на примере двумерных задач теории упругости (плоских и осесимметричных).
- Продемонстрировать применение разработанного подхода МГП в напряжениях на примере численного анализа напряженного состояния резинометаллических конструкций (амортизаторов).

**Методология и методы исследования** основаны на использовании методов функционального анализа, теории упругости, вычислительной механики деформируемого твердого тела. Применена программная среда MATLAB.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Созданы теоретические основы метода геометрического погружения в напряжениях, позволяющего свести отыскание обобщенного решения задачи линейной теории упругости в области произвольной конфигурации к итерационной последовательности задач в области канонической формы. Предложен процесс построения итерационной процедуры МГП в напряжениях, сформулирована и доказана теорема о ее сходимости, установлен вид дифференциальной формулировки краевой задачи теории упругости в напряжениях в канонической области, соответствующий вариационному уравнению МГП в напряжениях, в том числе возможный вид доопределения граничных условий на новых границах канонической области, возникших в результате осуществления процедуры погружения. Практическая значимость работы состоит в разработанных алгоритмах и программах, реализующих МГП в напряжениях, возможности их применения для анализа напряженного состояния тел сложной конфигурации, в том числе конструкций из несжимаемых упругих материалов.

**Достоверность результатов** обеспечивается сравнением с известными аналитическими решениями других авторов, численными решениями, полученными другими методами, практическим подтверждением сходимости

численных процедур и выполнения естественных граничных условий.

**Научная новизна:**

1. Проведено обобщение метода геометрического погружения на класс краевых задач теории упругости в напряжениях, позволяющего свести отыскание обобщенного решения задачи линейной теории упругости в области произвольной конфигурации к итерационной последовательности задач в области канонической формы. Предложен процесс построения вариационно-итерационной процедуры МГП в напряжениях, сформулирована и доказана теорема о ее сходимости.

2. Установлен вид дифференциальной формулировки краевой задачи теории упругости в напряжениях в канонической области, соответствующий вариационному уравнению МГП в напряжениях, в том числе возможный вид доопределения граничных условий на новых границах канонической области, возникших в результате осуществления процедуры погружения.

3. Предложен и реализован в виде программ в среде MatLab алгоритм построения дискретного аналога вариационного уравнения МГП на основе метода конечных элементов в напряжениях. Изучены характеристики практической сходимости дискретного аналога МГП и итерационной процедуры МГП на примере решения двумерных (плоских и осесимметричных) задач теории упругости в напряжениях.

4. Продемонстрированы возможности известных конечных элементов в напряжениях канонической формы для решения задач теории упругости в областях произвольной конфигурации.

**На защиту выносятся:**

1. Общие теоретические положения МГП на основе принципа минимума дополнительной работы: схема построения решения в канонической области; обоснование сходимости итерационной процедуры, дифференциальная формулировка МГП; вид граничных условий в канонической области.

2. Варианты построения дискретного аналога вариационно-итерационной процедуры МГП и результаты исследования практической сходимости конечно-элементного аналога МГП и итерационной процедуры МГП в напряжениях для плоских и осесимметричных задач теории упругости.

**Личный вклад** автора заключается в создании программ, реализующих МГП в напряжениях, проведении вычислительных экспериментов. Постановки задач, теоретические выкладки и анализ полученных результатов проводились автором совместно с научным руководителем.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на XIX и XX Зимних школах по механике сплошных сред (г. Пермь, 2015, 2017), на XXI и XXV Всероссийской школе – конференции молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2012, 2016), на XVIII и XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (г. Алушта, 2013, 2015), на XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и

прикладной механики (г. Казань, 2015), на Всероссийской научной конференции «Проблемы деформирования и разрушения материалов и конструкций» (г. Пермь, 2015). Полностью работа доложена и обсуждена на семинарах кафедры ВМиМ ПНИПУ (рук. доцент П.В. Максимов), Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. академик РАН В.П. Матвеев), кафедры ММСП ПНИПУ (рук. профессор П.В. Трусов), кафедры МКМК ПНИПУ (рук. профессор А.Н. Аношкин).

**Публикации.** По теме диссертационного исследования опубликовано 11 научных работ, из них 2 статьи в ведущих рецензируемых научных изданиях, входящих в Перечень ВАК, в том числе - 1 в базе цитирования Web of Science, основные положения и разделы работы отражены в статьях [1 – 3].

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 130 наименований. Общий объем работы – 112 страниц машинописного текста, содержащего 47 иллюстраций и 2 таблицы.

### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**В Главе 1** приведен анализ научных публикаций по проблеме развития приближенных и численных методов для решения краевых задач теории упругости. Уделено внимание развитию классических методов теории упругости, подходам, основанным на вариационном принципе Кастильяно, приведен обзор численных процедур, позволяющих свести краевую задачу теории упругости для тел сложной формы к задачам на канонических областях. На основе анализа научных публикаций, сформулированы цель и задачи диссертационной работы.

**В Главе 2** предложено обобщение метода геометрического погружения на класс краевых задач теории упругости в напряжениях. Описана процедура сведения краевой задачи теории упругости в напряжениях, сформулированной в области произвольной конфигурации, к итерационной последовательности краевых задач на канонической области.

Рассмотрены краевая задача теории упругости в напряжениях в дифференциальной форме при отсутствии объемных сил и вариационная формулировка, включающая функционал дополнительной работы упругого тела:

$$P_{don}(\hat{\sigma}) = \int_D A(\hat{\sigma}) dD - \int_{S_u} t_i(\hat{\sigma}) U_i dS_u = \frac{1}{2} \int_D \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dD - \int_{S_u} t_i(\hat{\sigma}) U_i dS_u, \quad (1)$$

где  $A(\hat{\sigma}) = \frac{1}{2E} [(1+\nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\sigma_{kk}]$ , определенный на множестве статически допустимых полей напряжений  $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих уравнениям равновесия в области  $D$  и статическим граничным условиям на границе  $S_\sigma$ . В выражении (1):  $t_i = \sigma_{ij}n_j$  – усилия на поверхности  $S_u$ ;  $S = S_\sigma \cup S_u$ ;  $\mathbf{x} \in D$  – радиус-вектор с компонентами  $x_i$  произвольной точки области, занятой

упругим телом;  $\mathbf{n}$  – вектор единичной внешней нормали к границе  $S$  с компонентами  $n_i$ ;  $\hat{\sigma}$  – симметричный тензор напряжений с компонентами  $\sigma_{ij}$ ;  $\hat{\varepsilon}$  – симметричный тензор деформации с компонентами  $\varepsilon_{ij}$ ;  $\mathbf{U}$  – вектор заданных на границе  $S_u$  перемещений с компонентами  $U_i$ .

Для проведения теоретического обоснования метода геометрического погружения в напряжения введено в рассмотрение пространство  $V$  векторов перемещений  $\mathbf{u}$ :  $V(R^n) = \{\mathbf{u} \in H^3(R^n)\}$ . Действием на элементы  $\mathbf{u} \in V(R^n)$

линейным дифференциальным оператором  $\text{def}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}((\Delta \mathbf{u})^T + \Delta \mathbf{u})$ , получено пространство тензоров деформации  $\hat{\varepsilon}$ :

$$W(R^n) = \{\hat{\varepsilon} \in H^2(R^n), \text{Ink}(\hat{\varepsilon}) = 0, \hat{\varepsilon} = \text{def}(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in V(R^n)\}.$$

Линейное преобразование  $L\hat{\varepsilon} = {}^4\hat{C} \cdot \hat{\varepsilon}$ , где  ${}^4\hat{C}$  – тензор упругих постоянных материала, элементов  $\hat{\varepsilon} \in W(R^n)$  дает пространство тензоров напряжений  $\hat{\sigma}$ :

$$\Phi(R^n) = \{\hat{\sigma} \in H^2(R^n), \hat{\sigma} = L\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon} \in W(R^n)\}.$$

В дальнейшем рассматривается подпространство  $\Psi(D)$  пространства  $\Phi(R^n)$ :

$$\Psi(D) = \{\hat{\psi} \in \Phi(D); \text{div} \hat{\psi} = 0, \mathbf{x} \in D; \hat{\psi} \cdot \mathbf{n} = 0, \mathbf{x} \in S_\sigma\},$$

где  $\hat{\sigma} = \hat{\psi} + \hat{\phi}$ ,  $(\hat{\phi} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}, \mathbf{x} \in S_\sigma)$ . Пространство  $\Psi(D)$  является полным замкнутым подпространством Соболева.

Определим скалярные произведения и нормы:

$$\forall \hat{\chi}, \hat{\psi} \in \Psi(D): \langle \hat{\chi}, \hat{\psi} \rangle = \int_D \hat{\chi} \cdot \hat{\varepsilon}(\hat{\psi}) dD$$

$$\forall \mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{f}(\hat{\psi}) \in L_2(S_u): (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{f}(\hat{\psi})) = \int_{S_u} \mathbf{t}(\hat{\chi}) \cdot \mathbf{f}(\hat{\psi}) dS_u = \int_{S_u} \mathbf{t}(\hat{\chi}) \cdot \mathbf{U} dS_u,$$

$$\forall \hat{\psi} \in \Psi(D) \quad \|\hat{\psi}\| = \langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle^{1/2}, \forall \mathbf{t} \in L_2(S_u) \quad \|\mathbf{t}\|_S = (\mathbf{t}, \mathbf{t})^{1/2},$$

где  $\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{f}(\hat{\psi}) \equiv \mathbf{U}$  – операторы, отображающие элементы  $\hat{\psi}, \hat{\chi} \in H^2(D)$  в элементы векторного пространства  $L_2(S_u)$ .

С учетом выше сказанного, функционал (1) переписывается в виде:

$$\Pi_{\text{don}}(\hat{\psi}) = \frac{1}{2} \int_D \hat{\psi} \cdot \hat{\varepsilon}(\hat{\psi}) dD - \int_{S_u} \mathbf{t}(\hat{\psi}) \cdot \mathbf{U} dS_u, \text{ или } \Pi_{\text{don}}(\hat{\psi}) = \frac{1}{2} \langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle - (\mathbf{t}(\hat{\psi}), \mathbf{U}),$$

а его вариация – в виде:  $\delta \Pi_{\text{don}}(\hat{\psi}) = \int_D \hat{\chi} \cdot \hat{\varepsilon}(\hat{\psi}) dD - \int_{S_u} \mathbf{t}(\hat{\chi}) \cdot \mathbf{U} dS_u$ .

Таким образом, приходим к вариационному уравнению

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi(D) \quad \langle \hat{\chi}, \hat{\psi} \rangle = (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U}), \quad (2)$$

для которого согласно теореме Лакса-Мильграма существует единственное решение  $\hat{\psi} \in \Psi(D)$ .

Для осуществления геометрического погружения в рассмотрение вводится каноническая область  $\bar{D}_0$ , представляющая собой замыкание  $\bar{D}_0 = D_0 \cup S_0$  ограниченного открытого множества  $D_0 \subset R^n$ , имеющего непрерывную по Липшицу границу  $S_0$  (рис. 1). Пусть выполняется условие  $\bar{D} \subset \bar{D}_0$ . Полагаем также, что  $S_u^1 = S_u \cap S_0$ ,  $S_u^2 = S_u \cap S_\Delta$ , где  $S_\Delta$  – непрерывная по Липшицу граница области  $D_\Delta = D_0 \setminus D$  – дополнения множества  $D$  до  $D_0$ . Таким образом,  $S_u = S_u^1 \cup S_u^2$ ,  $S_0 = S_u^1 \cup S_0^1 \cup S_\sigma$ ,  $S_0^1 = S_0 \cap S_\Delta$ ,  $S_\Delta = S_0^1 \cup S_u^2$ .

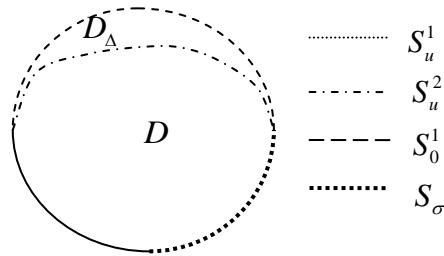


Рис. 1. Исходная область  $D$ , область дополнения  $D_\Delta$  и обозначения границ.

Рассмотрим соответствие решения уравнения (2) полному замкнутому пространству

$$\Psi_0(D_0) = \{\hat{\psi} \in \Phi(D_0); \operatorname{div} \hat{\psi} = 0, \mathbf{x} \in D_0; \hat{\psi} \cdot \mathbf{n} = 0, \mathbf{x} \in S_\sigma; F(\hat{\psi}) = 0, \mathbf{x} \in S_0^1\} \quad (3)$$

со скалярным произведением  $\forall \hat{\chi}, \hat{\psi} \in \Psi_0(D_0): \langle \hat{\chi}, \hat{\psi} \rangle_0 = \int_{D_0} \hat{\chi} \cdot \hat{\varepsilon}(\hat{\psi}) dD_0$  и

соответствующей ему нормой  $\forall \hat{\psi} \in \Psi_0(D_0) \|\hat{\psi}\|_0 = \langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle_0^{1/2}$ . В (3)  $F(\hat{\psi})$  – линейный однородный оператор, зависящий от тензора  $\hat{\psi}$  или только от некоторых его компонент.

Для установления соответствия элементов пространств  $\Psi(D)$  и  $\Psi_0(D_0)$  определены два однозначных отображения:

$$1) \gamma: \Psi_0(D_0) \rightarrow \Psi(D): \forall \hat{\psi} \in \Psi_0(D_0) \exists \hat{\chi} \in \Psi(D): \hat{\chi} = \gamma(\hat{\psi});$$

$$2) \varphi: \Psi(D) \rightarrow \Psi_0(D_0): \forall \hat{\chi} \in \Psi(D) \exists \hat{\psi} \in \Psi_0(D_0): \hat{\psi} = \varphi(\hat{\chi}),$$

с помощью которых получено уравнение, основополагающее для метода геометрического погружения в вариационной формулировке, сформулированное на канонической области:

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \langle \hat{\chi}, \varphi(\hat{\psi}) \rangle_0 = \langle \hat{\chi}, \varphi(\hat{\psi}) \rangle_\Delta + (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U}). \quad (4)$$

Установлено, что дифференциальным аналогом (4) являются уравнения совместности в форме Бельтрами-Мичелла в области  $D_0$ , кинематические граничные условия на границах  $S_u^2$  и  $S_u^1$ . Так же получено, что на новой границе  $S_0^1$  должно выполняться требование  $\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D) \mathbf{u}(\hat{\psi}) \cdot \hat{\chi} \cdot \mathbf{n} = 0, \mathbf{x} \in S_0^1$ ,



которому удовлетворяют все типы однородных краевых условий. Используя этот произвол, можно выбрать наиболее приемлемый тип краевых условий для конкретно решаемой задачи. Следует отметить, что принятый вариант краевого условия при  $\mathbf{x} \in S_0^1$  однозначно определит и вид оператора  $F(\hat{\psi})$  в (3).

Рассмотрено вспомогательное вариационное уравнение

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \quad \langle \hat{\chi}, \hat{\xi} \rangle_0 = (1 - \varepsilon) \langle \hat{\chi}, \hat{\xi} \rangle_{\Delta} + (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U}), \quad (5)$$

где  $\forall \hat{\xi} \in \Psi_0(D_0)$  и  $\varepsilon$  – числовой параметр и доказаны следующие теоремы:

**Теорема 1.** Если числовой параметр  $\varepsilon$  удовлетворяет условию  $\varepsilon \geq 0$ , то разность  $\gamma(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi})$  решений вариационных уравнений (4) и (5) по норме пространства  $\Psi(D)$  удовлетворяет неравенству  $\|\gamma(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi})\| \leq C\varepsilon$ , где постоянная  $C$  не зависит от  $\varepsilon$ .

Из теоремы 1 следует, что при достаточно малой величине  $\varepsilon$  в области  $D$  решение вариационной задачи (5) сколь угодно близко к решению исходного вариационного уравнения (4) по норме пространства  $\Psi(D)$  и может быть использовано в качестве приближенного решения.

**Теорема 2.** Если числовой параметр  $\varepsilon$  удовлетворяет условию  $0 < \varepsilon \leq 1$ , то последовательность итераций  $\{\xi^k\}$  вариационного уравнения

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \quad \langle \hat{\chi}, \hat{\xi}^k \rangle_0 = (1 - \varepsilon) \langle \hat{\chi}, \hat{\xi}^{k-1} \rangle_{\Delta} + (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U}), \quad (6)$$

$$k = 1, 2, \dots; \quad \hat{\xi}^0 = 0$$

сходится по норме пространства  $\Psi_0(D_0)$ , т.е.  $\|\hat{\xi}^m - \hat{\xi}^n\|_{0, m, n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ .

Уравнение (6) будем называть вариационным уравнением метода геометрического погружения. Из теоремы 2 следует, что итерационный процесс метода геометрического погружения сходится всегда независимо от степени отличия области  $D$  от  $D_0$ .

**В Главе 3** показано применение метода геометрического погружения в напряжениях для решения плоских задач теории упругости в декартовой системе координат. Выполнено построение дискретного аналога вариационного уравнения МГП методом Ритца и методом конечных элементов в напряжениях.

Конечно-элементная реализация осуществлена с использованием элемента прямоугольной формы, пригодного для решения плоских задач теории упругости в канонических по форме областях, что как раз и необходимо для процедуры погружения. Для обеспечения статической допустимости полей напряжений внутри конечного элемента введена аппроксимация функции напряжений Эри, на основе которой удастся выбрать полиномиальные аппроксимации компонент тензора напряжений, удовлетворяющие в элементе уравнениям равновесия; выполнение статических граничных условий обеспечивается наложением на систему дополнительных условий с помощью множителей Лагранжа.

В качестве примера реализации конечно-элементной процедуры МГП рассмотрена плоская задача теории упругости в декартовой системе координат: сжатие вдоль оси  $Ox$  бесконечной пластины с вклеенным круговым абсолютно жестким включением радиуса  $R$  под действием равномерно распределенной нагрузки  $P$ . На контуре включения равны нулю обе компоненты вектора перемещений. Данная задача имеет известное аналитическое решение, что позволяет подкрепить теоретические доказательства о сходимости итерационного процесса МГП данными численных исследований. При численном решении размеры пластинки были приняты равными  $2a \times 2a$ , радиус выреза  $R = a/7$ , параметры материала:

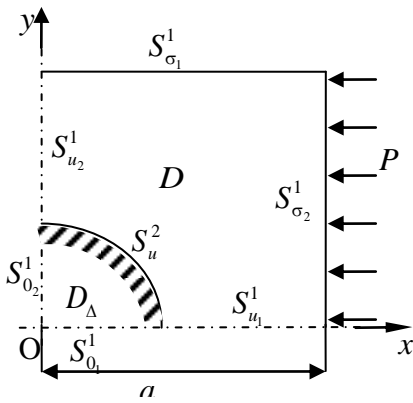


Рис. 2.  
Расчетная схема

$E = 2,3 E + 11$  Па — модуль Юнга,  $\nu = 0,33$  — коэффициент Пуассона. В силу симметрии задачи относительно осей рассматривается четверть пластины (рис. 2). В качестве канонической области выбран прямоугольник размером  $2a \times 2a$ .

Так как по круговому контуру  $U_x = U_y = 0$ , то решение данной задачи по методу геометрического погружения сводится к реализации следующей вариационно-итерационной процедуры:

$$\int_{D_0} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k+1)}) dV = \int_{D_\Delta} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k)}) dV_\Delta, \quad \sigma_{ij}^{(0)} \equiv 0, \quad k=1,2,3... \quad (7)$$

Для обеспечения статической допустимости полей напряжений при реализации итерационной процедуры (7), необходимо выполнить следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(0, y) = 0, \quad y \in S_{u_2}^1, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad x \in S_{u_1}^1, \\ \sigma_{xx}(a, y) = -P(y), \quad \tau_{xy}(a, y) = 0, \quad y \in S_{\sigma_2}^1; \quad \sigma_{yy}(x, a) = \tau_{xy}(x, a) = 0, \quad x \in S_{\sigma_1}^1. \end{aligned}$$

Кинематические граничные условия:

$$u_x(0, y) = 0 \quad y \in S_{u_2}^1, \quad u_y(x, 0) = 0 \quad x \in S_{u_1}^1, \quad u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0 \quad (x, y) \in S_u^2,$$

а так же равенство нулю по контуру включения вектора перемещений, выполняются из условия минимума функционала как естественные.

В соответствии с теоретическими положениями МГП в напряжениях на возникших после погружения области  $D$  в область  $D_0$  новых границах  $S_{0_2}^1$  и  $S_{0_1}^1$  необходимо сформулировать граничные условия, в качестве которых в данном случае возможно и удобно выбрать:

$$u_x(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0, \quad y \in S_{0_2}^1, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad x \in S_{0_1}^1.$$

Особенность метода геометрического погружения состоит в том, что точность получаемого решения можно улучшать, как увеличением степени пространственной дискретизации, так и увеличением числа итераций. Была выполнена серия вычислительных экспериментов на последовательности

сгущающихся сеток и уменьшающейся величины критерия  $\beta$  прекращения итераций, отвечающего за изменение относительной невязки. Установлено, что для данной задачи достаточно использование сетки из 361 элемента с 400 узлами при  $\beta = 0,001$ , при этом дальнейшее сгущение сетки и уменьшение  $\beta$  к существенному изменению численного решения не приводит.

Исходная задача так же решена с помощью традиционного МКЭ в перемещениях. Распределение компонент тензора напряжений, полученных МГП, лучше соответствуют аналитическому решению задачи на криволинейной границе области по сравнению с МКЭ в перемещениях (рис. 3). Это подтверждает одно из преимуществ метода – более точное определение напряженного состояния тела на границах сложной формы. В точках области, удаленных от места расположения концентратора распределения компонент тензора напряжений, полученные обоими методами практически не отличаются.

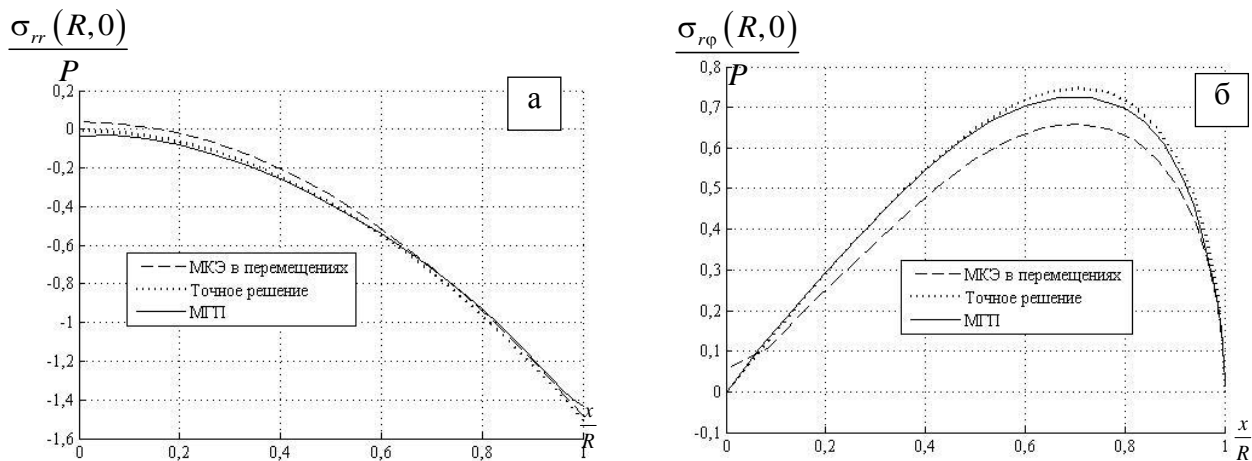


Рис. 3. Распределение напряжений по контуру выреза в полярной системе координат

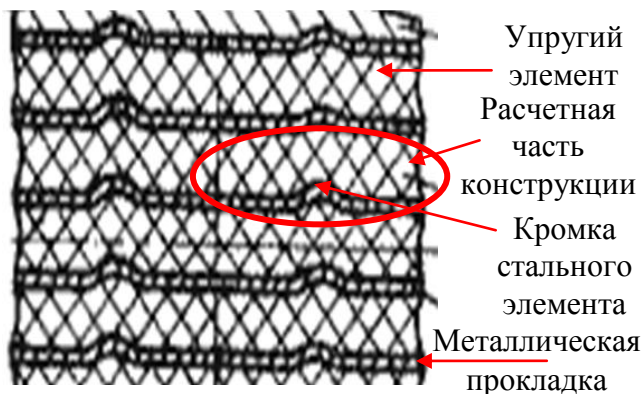


Рис. 4. Элемент конструкции амортизатора

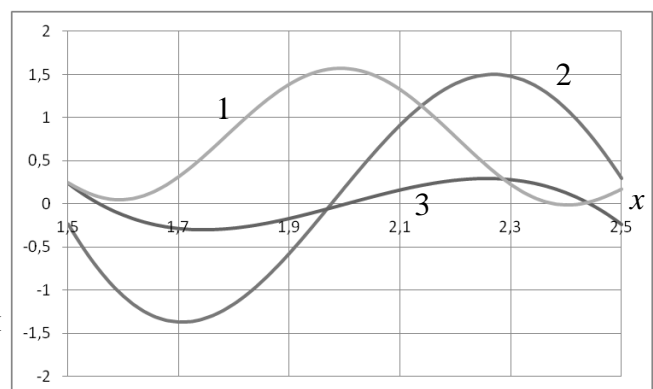


Рис. 5. Распределение компонент тензора напряжений по кромке стального элемента:  
1 -  $\tau_{xy}$ , Па; 2 -  $\sigma_{xx}$ , Па; 3 -  $\sigma_{yy}$ , Па.

В качестве практического применения МГП в напряжениях рассмотрена задача о сдвиговом деформировании резинометаллического амортизатора

(рис.4). Предполагается существование плоско-деформированного состояния, стальные элементы конструкции предполагаются абсолютно жесткими, упругий материал является несжимаемым. Результаты решения представлены в виде изменения напряжений по кромке стального элемента (рис. 5). Для сравнения эта же задача, но при  $\nu=0.28$ ,  $E=2.8E11$  Па, решена и методом конечных элементов в перемещениях. При измельчении сетки относительная погрешность решения по сравнению с результатами МКЭ в перемещениях не превышает 3,02%. Вычисления для несжимаемого материала производились при числе степеней свободы 5880.

В Главе 4 показано применение метода геометрического погружения в напряжения для решения осесимметричных задач теории упругости в цилиндрической системе координат. Выполнено построение дискретного аналога вариационного уравнения МГП методом конечных элементов в напряжениях.

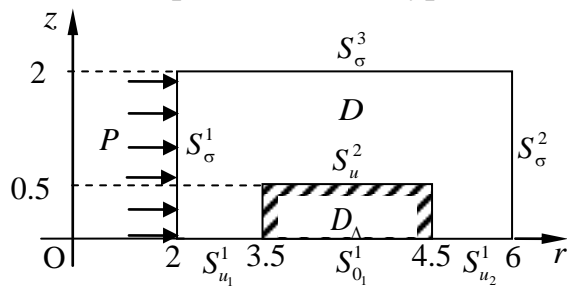


Рис. 6. Расчетная схема

Конечно-элементная реализация осуществлена с использованием прямоугольного в сечении кольцевого элемента. Внутри каждого конечного элемента введены аппроксимации компонент тензора напряжений, заведомо удовлетворяющие уравнениям равновесия в цилиндрической системе

координат<sup>2</sup>.

В качестве примера реализации конечно-элементной процедуры МГП рассмотрена осесимметричная задача теории упругости: определение напряженного состояния конечного полого цилиндра с жестким прямоугольным в сечении кольцевым включением под действием равномерно распределенного внутреннего давления  $P$  (рис. 6). На контуре включения равны нулю обе компоненты вектора перемещений. В качестве канонической области выбран цилиндр без включения, полностью охватывающий реальную область. Параметры материала:  $E=2.3E11$  Па,  $\nu=0,3$ ; давление  $P=10$  Па.

Решение данной задачи по методу геометрического погружения сводится к реализации следующей вариационно-итерационной процедуры:

$$\int_{D_0} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k+1)}) dV = \int_{D_\Delta} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k)}) dV_\Delta, \quad \sigma_{ij}^{(0)} \equiv 0, \quad k=1,2,3... \quad (8)$$

Для обеспечения статической допустимости полей напряжений при реализации итерационной процедуры (8), необходимо выполнить следующие граничные условия:

$$\sigma_{rr}(2, z) = -P, \quad \tau_{rz}(2, z) = 0, \quad z \in S_\sigma^1; \quad \sigma_{rr}(6, z) = 0, \quad \tau_{rz}(6, z) = 0, \quad z \in S_\sigma^2;$$

<sup>2</sup> R.L. Spilker, T.H.H. Pian A study of axisymmetric solid of revolution elements based on the assumed-stress hybrid model // Computers and structures. 1978. Vol.9. pp. 273-279.

$$\sigma_{zz}(r,2) = \tau_{rz}(r,2) = 0, \quad r \in S_\sigma^3; \quad \tau_{rz}(r,0) = 0, \quad r \in S_{u_1}^1 \cup S_{u_2}^1.$$

Кинематические граничные условия:

$$u_r(r,z) = u_z(r,z) = 0 \quad (r,z) \in S_u^2; \quad u_z(r,0) = 0 \quad (r,z) \in S_{u_1}^1 \cup S_{u_2}^1.$$

Также при процедуре погружения образуется новая граница  $S_{0_1}^1$ , на которую удобно продлить условия симметрии, такие же, как на  $S_{u_1}^1$  и  $S_{u_2}^1$ :

$$\tau_{rz}(r,0) = u_z(r,0) = 0 \quad (r,z) \in S_{0_1}^1.$$

Исходная задача была решена двумя методами: МГП в напряжениях (степень дискретизации 3267) и методом конечных элементов в перемещениях (степень дискретизации 3418). Для качественного сравнения решения приведены распределения характерных полей напряжений в реальной области, полученные обоими подходами (рис. 7-8).

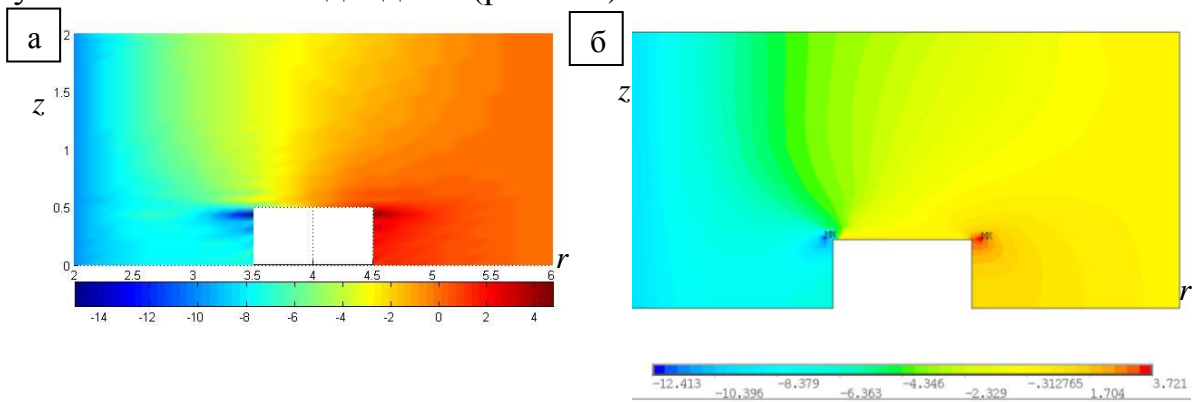


Рис. 7. Распределение  $\sigma_{rr}$ , Па а) МГП в напряжениях, б) МКЭ в перемещениях

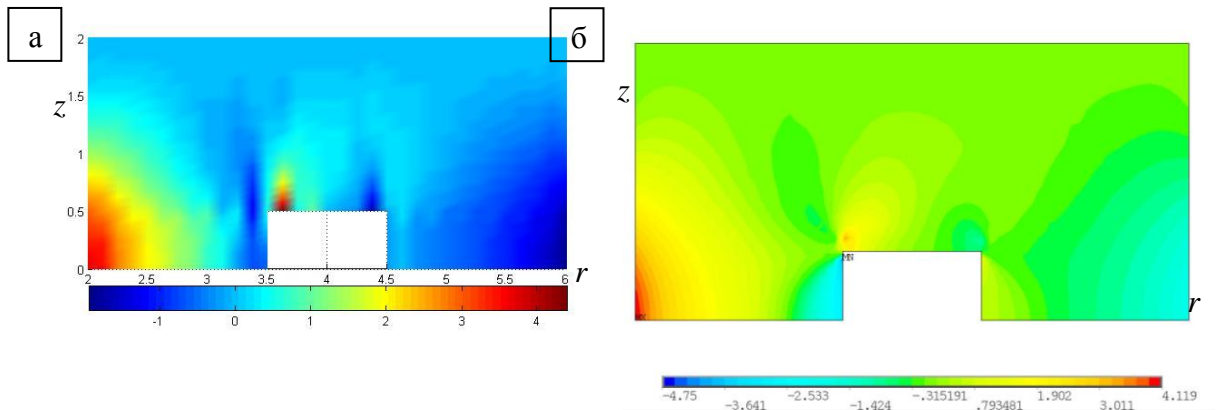


Рис. 8. Распределение  $\sigma_{zz}$ , Па а) МГП в напряжениях, б) МКЭ в перемещениях

Из рис. 7-8 видно, что результаты, полученные обоими методами, достаточно близки, что подтверждает достоверность и правильность решения методом геометрического погружения в напряжениях.

Для установления сходимости итерационной процедуры МГП от степени дискретизации канонической области, была выполнена серия расчетов на последовательности равномерно сгущающихся сеток. В качестве эталонного решения взяты результаты, полученные методом конечных элементов в перемещениях (степень дискретизации 6088). Установлено, что для данной

задачи достаточно использование сетки с 3267 числом узловых неизвестных. При этом дальнейшее сгущение сетки к существенному изменению численного решения не приводит. Для определения сходимости итерационной процедуры от числа итераций рассмотрено изменение относительной невязки на каждом шаге решения, из анализа которого было установлено, что для получения качественного решения требуется порядка 40 итераций, для последующих итераций относительная невязка не превышает 0.0001.

В качестве примеров практического применения рассмотрены задачи определения напряженного состояния резинометаллических амортизаторов

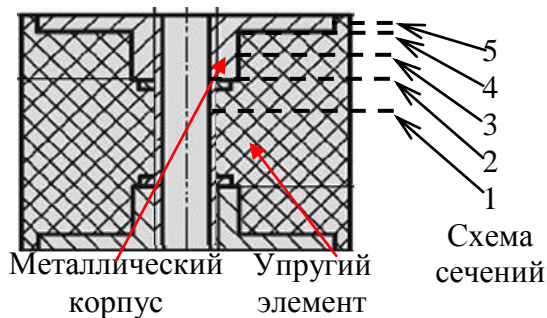


Рис. 9. Резинометаллический амортизатор, тип С; схема рассматриваемых сечений

осесимметричной формы, имеющих широкое распространение в машиностроении, судостроении, автомобильной промышленности и других отраслях в качестве демпфирующих устройств. Для примера выбраны две типичных конструкции, условно названных «амортизатор 1» и «амортизатор 2».

*Амортизатор 1.* Рассматривается цилиндрический амортизатор (рис.9),

предназначенный для компенсации продольных воздействий, стальной элемент которого предполагается абсолютно жестким и непрерывно склеенным с резиной. Представлены распределения характерных компонент тензора напряжений по сечениям амортизатора (рис. 10-11) согласно схеме рис. 9.

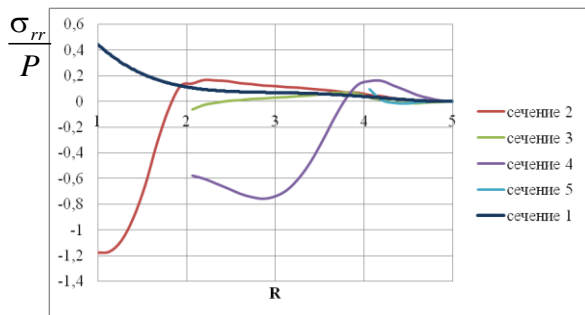


Рис. 10. Распределение  $\frac{\sigma_{rr}}{P}$  по сечениям

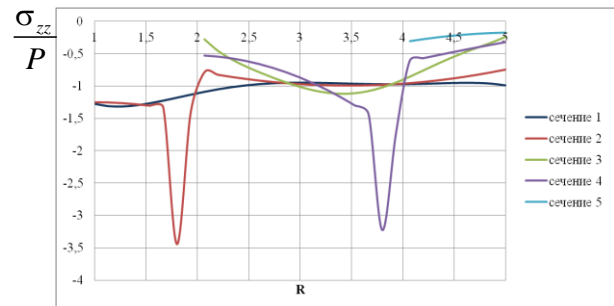


Рис. 11. Распределение  $\frac{\sigma_{zz}}{P}$  по сечениям

*Амортизатор 2.* Рассмотрена конструкция амортизатора в виде фигурной втулки (рис. 12), так же предназначенного для компенсации продольных воздействий, металлические элементы смоделированы абсолютно жесткими и непрерывно склеенными с резиной. Результаты представлены картиной интенсивности напряжений во всей рассматриваемой конструкции (рис. 13).

Результаты решений подтверждены сравнением (для случая  $\nu = 0.28$ ) с решениями, полученными методом конечных элементов в перемещениях, получено хорошее количественное соответствие. Установлено, что для получения достоверных результатов МЭП необходима сетка порядка 4000 степеней свободы, при этом дальнейшее сгущение сетки к существенному



изменению численного решения не приводит.

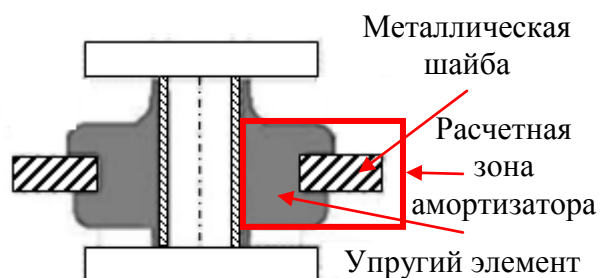


Рис. 12. Резинометаллический амортизатор в виде фигурной втулки

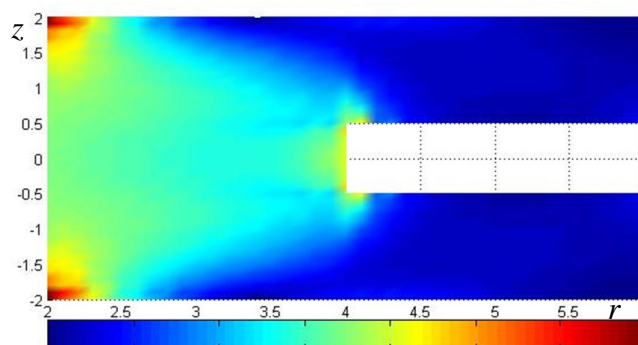


Рис. 13. Интенсивность напряжений, приведенная к величине нагрузки

### Заключение

1. Проведено теоретическое обоснование метода геометрического погружения в напряжениях, доказана сходимость предложенной итерационно-вариационной процедуры МГП на основе принципа минимума дополнительной работы.

2. Предложена процедура сведения краевой задачи теории упругости в напряжениях, сформулированной в области произвольной конфигурации, к итерационной последовательности краевых задач на канонической области. Получен вид дифференциальной формулировки краевой задачи теории упругости на канонической области, соответствующей вариационному уравнению метода геометрического погружения, построенному в рамках вариационного принципа Кастильяно. Установлен вид граничных условий, которые необходимо сформулировать на новых границах канонической области, возникших в результате процедуры геометрического погружения.

3. Предложенные алгоритмы метода геометрического погружения реализованы в виде программ в среде пакета MatLab.

4. Продемонстрировано практическое применение метода геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно и его конечно-элементной реализации в напряжениях на примерах численного решения плоских и осесимметричных задач теории упругости.

5. Получено достаточно хорошее соответствие результатов определения полей напряжений в сравнении с аналитическими решениями и численными решениями традиционным МКЭ в перемещениях, что позволяет сделать вывод о возможности эффективного применения прямоугольных конечных элементов в напряжениях для получения решения двумерных (плоских и осесимметричных) задач в областях с криволинейными границами в том числе и для конструкций из несжимаемых (слабосжимаемых) материалов.

6. Продемонстрировано эффективное применение разработанных процедур МГП в напряжениях для решения прикладных задач расчета напряженного состояния плоских и осесимметричных резинометаллических амортизаторов.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Деревянкина П.О., Кузнецова Ю.С., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Теоретические положения метода геометрического погружения в напряжения // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т.7, № 3. – С. 317-330. (Входит в перечень ВАК).
2. Кузнецова Ю.С., Труфанов Н.А. МКЭ-реализация метода геометрического погружения в напряжения на примере плоских задач теории упругости // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т.7, № 4. – С.460-471. (Входит в перечень ВАК).
3. Kuznetsova Y.S., Vorobyev N.A., Trufanov N.A. Application of the geometric immersion method based on the Castigliano variational principle for the axisymmetric problems of elasticity theory // IOP: Materials Science and Engineering. – 2016. –Pp.726-732 (Web of Science).
4. Труфанов Н.А., Кузнецова Ю.С. Конечно-элементная реализация метода геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно для плоской задачи теории упругости // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2013, №1. – С. 221-234..
5. Кузнецова Ю.С., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. О методе конечных элементов в напряжениях и варианте его реализации на основе процедуры геометрического погружения // В книге: XIX Зимняя школа по механике сплошных сред: Тезисы докладов. – 2015.–С. 173.
6. Кузнецова Ю.С., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Реализация метода конечных элементов в напряжениях на основе итерационной процедуры метода геометрического погружения // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015), 24-31 мая 2015 г., Алушта. – М.: МАИ, 2015. – С.298-299.
7. Труфанов Н.А., Кузнецова Ю.С. Применение метода геометрического погружения в напряжениях при решении задач теории упругости для несжимаемого и слабосжимаемого материала // Проблемы деформирования и разрушения материалов и конструкций: тез. докл. Всероссийской научн. Конференции. – Пермь, 17-19 июня 2015. – С.63.
8. Труфанов Н.А., Кузнецова Ю.С. Итерационная процедура реализации вариационного принципа Кастильяно для задач теории упругости на основе метода геометрического погружения // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. – Казань, 2015. – С. 3800-3802.
9. Труфанов Н.А., Кузнецова Ю.С., Воробьев Н.А. Метод геометрического погружения для решения осесимметричных задач теории упругости в напряжениях // В книге: XX Зимняя школа по механике сплошных сред: Тезисы докладов. – 2017. –С. 348.
10. Н.А. Воробьев, Ю.С. Кузнецова, Н.А. Труфанов Метод геометрического погружения в напряжениях и его реализация для плоских задач теории упругости с помощью метода ритца // Математическое моделирование в естественных науках: материалы XXV всерос. шк.-конф. мол. ученых и студентов, г.Пермь, 5-8 окт. 2016г. / ПНИПУ – Пермь: изд-во ПНИПУ. – 2016. – С.471-475. - 1 электрон. опт. диск (CD ROM)
11. Н.А. Воробьев, Ю.С. Кузнецова, Н.А. Труфанов Применение метода геометрического погружения в напряжениях для решения осесимметричных задач теории упругости // Математическое моделирование в естественных науках: материалы XXV всерос. шк.-конф. мол. ученых и студентов, г.Пермь, 5-8 окт. 2016г. / ПНИПУ – Пермь: изд-во ПНИПУ. – 2016. – С.475-479. - 1 электрон. опт. диск (CD ROM).