На правах рукописи

АНДРЮКОВА ВЕРОНИКА ЮРЬЕВНА

НЕЛИНЕЙНЫЕ И КОНСТРУКТИВНО – НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Сыктывкар 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина» (СыктГУ).

Научный руководитель: **Тарасов Владимир Николаевич**, кандидат физико-математических наук, доцент.

Официальные оппоненты: **Бураго Николай Георгиевич**, доктор физико-математических наук, ФГБУН "Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН", ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела (г. Москва).

Лекомцев Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, ФГБУН "Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук" (филиал – "Институт механики сплошных сред УрО РАН"), научный сотрудник отдела комплексных проблем механики деформируемых твердых тел (г. Пермь).

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург.

Защита состоится **14 июня 2018 г.** в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 004.036.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук (филиал – Институт механики сплошных сред УрО РАН) по адресу: 614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1; тел: (342) 237-84-61; факс: (342) 237-84-87; сайт: www.icmm.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан « ____ » __________ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, доцент / А.Л. Зуев

Общая характеристика диссертационной работы

Актуальность и степень разработанности темы

Исследование устойчивости упругих систем берет свое начало с работ Эйлера по теории продольного изгиба. Проблемы упругой устойчивости исследовались многими авторами, например, Б. Будянским, И.И. Воровичем, А.Л. Гольденвейзером, Э.И. Григолюком, В.В. Новожиловым, А.В. Погореловым, Е.П. Поповым, С.П. Тимошенко, Г. Циглером. Общая концепция упругой бифуркационной устойчивости изложена в монографии В.В. Новожилова. В связи со стремительным развитием вычислительной техники и появлением универсальных численных алгоритмов решения краевых задач (метод граничных элементов, метод конечных элементов) к настоящему времени появились комплексы программ, позволяющие рассчитывать упругие конструкции на устойчивость, к примеру, разработанные А.В. Перельмутером и В.И. Сливкером.

В общем случае проблемы упругой устойчивости сводятся к нахождению точек бифуркации некоторых нелинейных уравнений.

Исследованию контактных задач для гибких элементов конструкций посвящено большое количество работ, например, диссертация Ю.П. Артюхина, его исследования в соавторстве с С.Н. Карасевым по теории пластин и оболочек, К. Байоки совместно с А. Капело в работе "Вариационные и квазивариационные неравенства". Решение вариационных неравенств в механике рассмотрено в одноименной книге группой авторов: И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек. Численно исследовали вариационные неравенства Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тримольер, П. Панагиотопулоса.

Одной из важных проблем является задача изучения влияния односторонних связей на устойчивость упругой конструкции. Наличие таких связей приводит к появлению неравенств, которым должны удовлетворять перемещения. Анализ упругих систем на устойчивость при наличии односторонних (неудерживающих) связей сводится к определению параметров, при которых задача оптимизации имеет неединственное решение. Общий подход и методы решения задач устойчивости упругих систем при наличии односторонних связей изложены в монографии В.Н. Тарасова, а также в его работах в соавторстве с Д.В. Холмогоровым. Во многих случаях системы, ограниченные односторонними связями, сводятся к идентификации условной положительности квадратичных форм на конусах. Алгебраический критерий условной положительности в самом важном случае, когда конус есть неотрицательный ортант в R^n, предложен в работах В.Л. Крепса и Л.Б. Рапопорта.

Целью диссертационной работы является исследование задач устойчивости упругих систем и влияние односторонних связей на значение критической нагрузки.

Актуальность исследования

Проблемы упругой устойчивости находятся в центре внимания механики тонкостенных конструкций. В связи с широким использованием в машиностроении, механике строительных конструкций и элементов с неизвестной областью контакта актуальной является задача расчета на прочность и устойчивость таких систем. Также актуальной является задача нахождения все более точных методов расчета оболочек вращения.

Научная новизна

Все результаты, полученные в работе, являются новыми. Ряд постановок задач устойчивости равновесия связаны с вариационными формулировками, которые важны как для теоретических, так и численных исследований. Рассматриваемые проблемы относятся к контактным задачам теории упругости с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкций. Подобные задачи являются конструктивно-нелинейными, так как при их математической формализации используются неравенства и недифференцируемые функции. При нагрузке, большей критической величины, упругая система может перейти в смежное состояние равновесия. При этом, как правило, малые возмущения приводят к большим изменениям состояния системы, вплоть до потери несущей способности. Поэтому в подобных задачах необходимо находить и исследовать точки бифуркации негладких уравнений или решений задач нелинейного программирования.

Методология и методы диссертационного исследования выбирались исходя из особенностей решаемых задач: конструктивно–нелинейные задачи исследовались методами математического моделирования с применением методов оптимизации, а также методов решения неклассических вариационных задач с ограничениями в виде неравенств.

Степень достоверности полученных результатов

Результаты математически строго доказаны и подтверждены численными экспериментами.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты решения задач устойчивости упругих систем при наличии односторонних связей могут быть использованы в проектировании различных конструкций, приборов машиностроения.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Аналитическое решение задачи устойчивости сжимаемого продольной силой стержня, прогиб которого с одной стороны ограничен жестким препятствием, при граничных условиях свободного края.

2. Аналитическое решение задачи устойчивости упругих колец, нагруженных нормальными или центральными силами, и подкрепленных упругими нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий.

3. Результаты численного исследования задачи устойчивости оболочек вращения в осесимметричном случае в наиболее точной нелинейной постановке с вычислением работы внешних сил по точной термодинамической формуле.

4. Результаты численного решения задачи устойчивости прямоугольных пластин при односторонних ограничениях на перемещения с граничными условиями свободного края.

5. Результаты численного анализа нелинейных колебаний прямоугольных пластин в рамках теории Кармана.

Апробация результатов

Результаты научных исследований опубликованы в 25 печатных работах и были представлены на конференциях различного уровня:
XIII Коми республиканской молодежной научной конференции. Российская академия наук Уральское отделение Коми научный центр, Сыктывкар, 1997.
XIV Коми республиканской молодежной научной конференции. Российская академия наук Уральское отделение Коми научный центр, Сыктывкар, 2000.
Международной конференции «XVIII сессия Международной Школы по моделям механики сплошной среды» г. Саратов, 2007.
«Февральские чтения», Сыктывкарский государственный университет (2008 г., 2010 г., 2011 г., 2012 г., 2013 г., 2014 г., 2015 г.).
«Февральские чтения» региональная научно – практическая конференция, Сыктывкарский лесной институт (2008 г., 2011 г., 2012 г.).
I Всероссийской молодежной научной конференции «Молодежь и наука на Севере», г. Сыктывкар (2008).
IV Международная конференция «Математическая физика и ее приложения», г. Самара, 2014 г.
XIX Зимняя школа по механике сплошных сред, г. Пермь, Институт механики сплошных сред, 2015 г.
Международная конференция по математической теории управления и механике, Суздаль, 2015 г.
Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 100-летию В.И. Феодосьева, Москва, 2016 г.
XX Зимняя школа по механике сплошных сред, г. Пермь, Институт механики сплошных сред, 2017 г.
Международная конференция «Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics». (CNSA-2017.) 22 — 27 мая 2017 г. Санкт-Петербург, Международный Математический институт им. Л. Эйлера. (ПОМИ РАН.)
Международный семинар «Теоретико-групповые методы исследования физических систем». 21-23 сентября 2017. Физико-математический институт Коми НЦ Уро РАН. Сыктывкар.

Публикации

По теме диссертации опубликованы 25 работ, включая 3 работы в рецензируемых журналах из перечня ВАК:

- **Андрюкова В.Ю., Тарасов В.Н.** Об устойчивости упругих систем с неудерживающими связями. // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2013. №3(15). С. 12-18.
- **В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов** Аналитическое решение задач устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения. Известия Коми НЦ Уральского отделения РАН. 3(19). 2014. с. 39 — 43.
- **Андрюкова В.Ю.** Некоторые задачи устойчивости упругих систем с односторонними ограничениями на перемещения.// "Вычислительная механика сплошных сред". Пермь. 2014. Том 7, №4. С.412 — 422.

А также публикацию, входящую в систему цитирования Scopus:

• **Veronika Andryukova, Vladimir Tarasov** Nonsmooth problem of stability for elastic rings. Труды международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В.Ф. Демьянова. Часть I. - СПб.: Издательство ВВМ, 2017. 268 с.; DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973928.

Личный вклад автора заключается в анализе текущего состояния исследований по теме работы, создании алгоритмов, формулировке основных результатов и выводов диссертации. Автор предложила и реализовала новый метод расчета на устойчивость оболочек вращения в осесимметричном случае. Автор лично получила аналитические решения задачи устойчивости стержня, прогиб которого с одной стороны ограничен жестким препятствием, при граничных условиях свободного края, а также задачи устойчивости упругих колец, нагруженных нормальными или центральными силами, и подкрепленных упругими нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий. Автор непосредственно разрабатывала и реализовывала алгоритм численного решения задач нелинейных колебаний прямоугольных пластин в рамках теории Кармана. Автор лично проводила численные эксперименты, представленные в работе, и обрабатывала полученные результаты.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 88 наименований. Работа изложена на 93 страницах текста, подготовленного в издательской системе $\LaTeX 2_\varepsilon$ и распечатанного в размере шрифта 14 пунктов через 1,5 межстрочных интервала.

Содержание работы

Во **введении** приводится обзор литературы по теме диссертационной работы, краткое описание диссертации.

Первая глава посвящена описанию современного состоянию исследований. **Вторая глава** представляет необходимый теоретический материал. **В третьей главе** приведено аналитическое решение задачи устойчивости сжимаемых продольной силой стержней, находящихся в упругой среде, прогибы которых с одной стороны ограничены жестким препятствием. Исследовано влияние граничных условий на величину критической силы. Также рассмотрена проблема устойчивости кругового кольца, сжимаемого равномерно распределенными центральными силами и силами внешнего нормального давления, при наличии односторонних ограничений на перемещения. Решена задача устойчивости прямоугольной пластины, прогиб которой ограничен двумя жесткими ребрами, при этом на двух кромках пластины выполняются граничные условия свободного края. Приведено решение осесимметричной задачи устойчивости оболочек вращения, находящихся под действием внешнего нормального давления. Для вычисления работы внешних сил использована точная термодинамическая формула. В **четвертой главе** исследуются линейные и нелинейные колебания прямоугольных пластин. Анализируются результаты численных экспериментов, проводится сравнительный анализ колебаний пластин в линейном и нелинейном случае.

В разделах 3.1 и 3.2 получены аналитические решения задачи устойчивости сжимаемых продольной силой стержней, находящихся в упругой среде, прогибы которых с одной стороны ограничены жестким препятствием, а также исследовано влияние граничных условий на величину критической силы.

Задача может быть сведена к решению вариационной проблемы

$$J(w) = \frac{1}{2}\int_0^\ell (Dw''^2 + Cw^2)dx \to \min \tag{1}$$

при ограничении

$$J_1(w) = \frac{1}{2}\int_0^\ell w'^2 dx = 1. \tag{2}$$

Предположим, что прогиб стержня w с одной стороны ограничен жестким препятствием так, что

$$w(x) \geq 0, \quad x \in [0, \ell]. \tag{3}$$

В диссертационной работе решена задача устойчивости стержня при комбинированных граничных условия.

• граничные условия жесткой заделки при $x = 0$ с граничными условиями свободного края при $x = \ell$:

$$\begin{cases} w(0) = 0, \ w'(0) = 0, \\ w''(\ell) = 0, \ w'''(\ell) + \frac{P}{D} w'(\ell) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Можно показать, что существует участок полного прилегания к стенке, т.е.

$$w(x) = 0, \ x \in [0, \ell_1], \text{ и } w(x) > 0, \ x \in (\ell_1, \ell]. \tag{5}$$

На интервале (ℓ_1, ℓ) выполнено уравнение Эйлера $w^{IV} + \omega w + \rho^2 w'' = 0$, где $\omega = C/D$, $\rho^2 = \lambda/D$, λ – множитель Лагранжа для ограничения изопериметрического типа (2). При данных граничных условиях $\rho^2 < 2\sqrt{\omega}$.

Общее решение уравнения при $x \in (\ell_1, \ell]$ имеет вид:

$$w(x) = c_1 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_3 e^{-\alpha x}\sin(\beta x) + \\ + c_4 e^{-\alpha x}\cos(\beta x), \tag{6}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\omega} - \rho^2}, \ \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\omega} + \rho^2}. \tag{7}$$

В точке l_1 должны быть выполнены условия $w(\ell_1) = 0$, $w'(\ell_1) = 0$, $w''(\ell_1) = 0$. Таким образом, имеем две системы уравнений:

$$\begin{cases} w(\ell_1) = 0, \ w'(\ell_1) = 0, \\ w''(\ell) = 0, \ w'''(\ell) + \frac{P}{D} w'(\ell) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} w(\ell_1) = 0, \ w''(\ell_1) = 0, \\ w''(\ell) = 0, \ w'''(\ell) + \frac{P}{D} w'(\ell) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Неизвестными в системе (8) и (9) являются c_1, c_2, c_3, c_4, l_1, P. Относительно произвольных постоянных эти системы являются системами однородных алгебраических уравнений. Приравнивая два определителя $\Delta_1(P, l_1)$ и $\Delta_2(P, l_1)$ к нулю и решая полученную систему методом Ньютона, находим значение критической силы P и длину участка полного прилегания l_1. Результаты вычислений приведены в табл.1.

Таблица 1. Значения критической силы в зависимости от жесткости среды ω

N	1	2	3	4	5	6
ω	100	200	350	450	550	800
$\tilde{\ell}$	0.745	0.627	0.545	0.512	0.487	0.443
ρ^2	12.6	17.8	23.5	26.7	29.5	35.6
ρ_*^2	11.9	15.6	19.5	21.8	23.8	28.5

В таблице 1 значения ρ^2 соответствуют критической нагрузке стержня при наличии односторонних ограничений на перемещения при различной жесткости среды ω. Для сравнения, в последней строке приведены значения критической силы $P = \rho_*^2$ для стержня, находящегося в упругой среде, при отсутствии односторонних ограничений на перемещения.

Задача (1) – (3) соответствует задаче об устойчивости сжимаемой продольной силой цилиндрической оболочки, находящейся в жесткой обойме. На рис.1 показано различие форм равновесия стержня после потери устойчивости при наличии односторонних ограничений на перемещения и без ограничений.

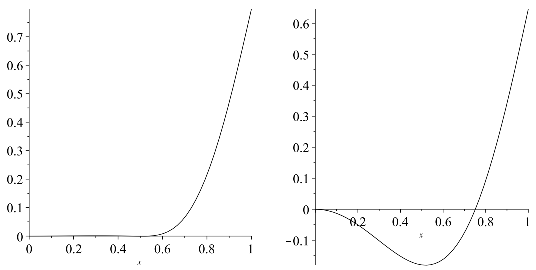

Рис. 1: Форма равновесия стержня после потери устойчивости при наличии односторонних ограничений на перемещения (слева) и без ограничений на перемещения (справа).

В разделе 3.3 рассмотрена устойчивость кругового кольца, сжимаемого равномерно распределенными центральными силами, при наличии односторонних ограничений на перемещения. Получено аналитическое решение задач устойчивости кольца с односторонним подкреплением в случае центральных сил. Предположим, что кольцо радиусом R, нагру-

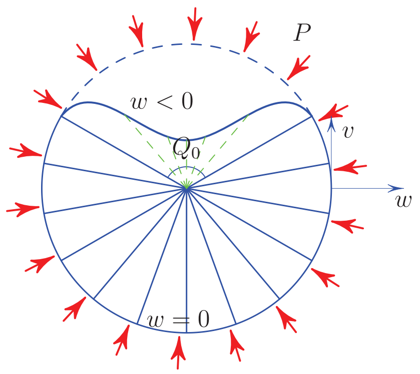

Рис. 2: Кольцо, подкрепленное нитями, невоспринимающими усилия, под действием центральных сил.

жено центральными силами P, равномерно распределенными по кольцу. Кольцо подкреплено нерастяжимыми нитями, невыдерживающими сжимающих усилий, один конец которых прикреплен к ободу, другой – к неподвижному центру кольца рис.2. В случае плоской деформации задача с односторонними ограничениями на перемещения может быть сведена к вариационной проблеме

$$\widetilde{J} = \frac{B}{2R^3}\int_0^{2\pi}(w'' + w)^2 d\vartheta \to \min \tag{10}$$

при ограничениях

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(w'^2 - 2w^2)d\vartheta = 1, \tag{11}$$

$$w \leq 0. \tag{12}$$

B – жесткость кольца при изгибе. Решение задачи (10) – (12) можно искать среди функций строго положительных на некотором интервале $[0, \vartheta_0]$ и равных нулю, если $\vartheta \notin [0, \vartheta_0]$. На интервале $[0, \vartheta_0]$ функция $w(\vartheta)$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{B}{R^3}(w^{IV} + 2w'' + w) + P(w'' + 2w) = 0, \tag{13}$$

где P – соответствующий множитель Лагранжа. Решение последнего уравнения имеет вид

$$w = A_1 \sin\widetilde{\alpha}\vartheta + A_2 \cos\widetilde{\alpha}\vartheta + A_3 \sin\widetilde{\beta}\vartheta + A_4 \cos\widetilde{\beta}\vartheta, \tag{14}$$

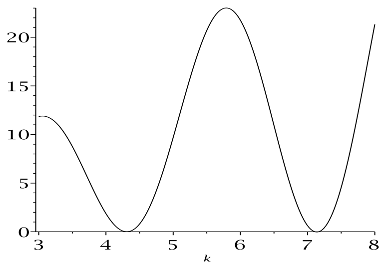

Рис. 3: График определителя $\Delta(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4.3}$.

где

$$\widetilde{\alpha} = \sqrt{\frac{2+k^2-\sqrt{k^4-4k^2}}{2}},\ \widetilde{\beta} = \sqrt{\frac{2+k^2+\sqrt{k^4-4k^2}}{2}},\ k^2 = \frac{PR^3}{B}.$$

Функция $w(\vartheta)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$w(0) = w(\vartheta_0) = 0,\ \ w'(0) = w'(\vartheta_0) = 0. \tag{15}$$

Подставляя (14) в (15), получим систему уравнений относительно неизвестных $A_1, A_2, A_3, A_4, k, \vartheta_0$. Для того, чтобы существовало нетривиальное решение краевой задачи (13), (15), необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (15)

$$\Delta(k;\vartheta_0) = 0. \tag{16}$$

При заданном ϑ_0 находим корень уравнения (16). Значение ϑ_0 должно быть как можно больше (тогда критическая сила будет меньше) и при этом собственная функция (14) на интервале $[0,\ \vartheta_0]$ должна сохранять знак. В результате получаем $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4.3}$, и корни уравнения (16) будут кратными (рис.3). С другой стороны, чем больше ϑ_0, тем меньше значение критического параметра k.

Таким образом, значение безразмерного параметра критической силы при наличии односторонних ограничений на перемещения (12) будет равно

$$k^2 = k_1^2 = k_2^2 = \frac{PR^3}{B} = 18.6044. \tag{17}$$

Для неподкрепленного кольца $k^2 = 4.5$.

Также рассмотрена задача подкрепленного кольца под действием внешнего нормального давления. В этом случае вариационная проблема отличается от предыдущей ограничением изопериметрического типа:

$$J(w) = \frac{B}{2R^3}\int_0^{2\pi}(w''+w)^2 d\vartheta \to \min_w, \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(w'^2 - w^2)d\vartheta = 1, \tag{19}$$

и имеет нетривиальное решение при граничных условиях периодичности и ограничениях

$$w(\vartheta) \leq 0. \tag{20}$$

Применим аналогичный подход к решению вариационной задачи (18) –(20). получим выражение для функции прогиба

$$w = A_1 \sin\vartheta + A_2 \cos\vartheta + A_3 \sin\alpha\vartheta + A_4 \cos\alpha\vartheta, \tag{21}$$

где $\alpha = \sqrt{1+k^2}$. В этом случае соответствующий определитель системы

$$d(\alpha) = -2\alpha\cos(\alpha\vartheta_0)\cos\vartheta_0 + 2\alpha - \sin(\alpha\vartheta_0)\sin\vartheta_0 - \alpha^2\sin(\alpha\vartheta_0)\sin\vartheta_0 = 0. \tag{22}$$

Решая уравнение (22) относительно неизвестной α, получим функцию $\alpha = \alpha(\vartheta_0)$. При заданном ϑ_0 уравнение (22) имеет бесконечное число корней. Далее, определяем форму прогиба. Необходимо искать минимальный корень уравнения (22), удовлетворяющий условию $\alpha > 1$. Также необходимо выполнение знаковых ограничений (20). Чем больше угол ϑ_0, тем меньше k^2, а значит и сила P. Значения критического параметра Р в зависимости от значений угла ϑ_0 приведены в таблице 2.

Таблица 2. Значения критического параметра α в зависимости от угла ϑ_0

ϑ_0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
α	4.9801	4.2915	3.2136	3	2.4841

Численные эксперименты при $\vartheta_0 > \pi$ показали, что собственная функция w будет менять знак на интервале $(0, \vartheta_0)$, то есть ограничения неотрицательности на функцию w не будут выполняться.

Ясно, что минимальной критической силе соответствует значение параметра $\alpha = 3$ при $\vartheta_0 = \pi$. В этом случае критическое давление для подкрепленного кольца равно

$$P = \frac{8B}{R^3}.$$

Для неподкрепленного кольца $P = \frac{3B}{R^3}$.

В разделе 3.4 работы решена задача устойчивости прямоугольной пластины, нагруженой по краям $x = 0$, $x = a$; $0 \leq y \leq b$ нормальными усилиями. Прогиб пластины w ограничен двумя жесткими ребрами, при этом на двух кромках пластины выполняются граничные условия свободного края. Задача сводится к нахождению минимальной силы σ, при которой вариационная задача

$$U - V \to \min_{w} \tag{23}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} w(x, y_1) \leq 0, & \text{при} x \in [0, a]\,, \\ w(x, y_2) \geq 0, & \text{при} x \in [0, a]\,, \end{cases} \tag{24}$$

где y_1, y_2 из $(0,b)$, имеет нетривиальное решение. Здесь

$$U(w) = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \big((\triangle w)^2 - (1-\nu)L(w,w)\big)\ dxdy, \tag{25}$$

где

$$\triangle w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$L(w,w) = 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right).$$

Работа внешних сил вычислена по формуле

$$V(w) = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \sigma\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dxdy. \tag{26}$$

При $x=0$, $x=a$ будут выполнены граничные условия шарнирного опирания:

$$\begin{cases} w(0,y) = w(a,y) = 0, \\ w_{xx}(0,y) = w_{xx}(a,y) = 0, \qquad 0 \le y \le b. \end{cases} \tag{27}$$

или граничные условия жесткой заделки:

$$\begin{cases} w(0,y) = w(a,y) = 0, \\ w_{x}(0,y) = w_{x}(a,y) = 0, \qquad 0 \le y \le b. \end{cases} \tag{28}$$

Будем предполагать, что при $y=0;b$ выполнены граничные условия свободного края:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x \partial y^2} = 0,\ 0 \le x \le a. \end{cases} \tag{29}$$

Результаты вычислений приведены в таблице 3.

Таблица 3. Значения критической силы σ^*
при различных граничных условиях.

	I	II	III	IV
$b=1$	21.95	32.21	51.49	8.98
$b=0.5$	60.40	69.44	91.85	5.37
Без огранич.	$\pi^2 \approx$ ≈ 9.87	$2\pi^2 \approx$ ≈ 19.74	$4\pi^2 \approx$ ≈ 39.48	$\pi^2/4 \approx$ ≈ 2.47

В таблице приведены значения критического параметра $\sigma^* = D^{-1}\sigma$ при $a=1$ для различных видов граничных условий: I - граничные условия шарнирного опирания (27), II - смешанные граничные условия, когда на

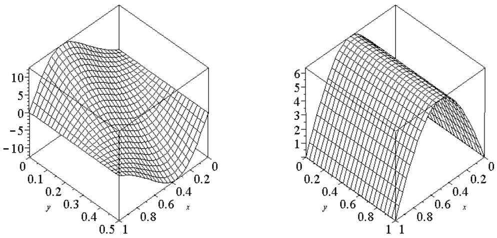

Рис. 4: Форма равновесия пластины после потери устойчивости при наличии односторонних ограничений на перемещения (слева) и без ограничений на перемещения (справа)

левом крае $x = 0$ выполнены условия (27), на правом - условия жесткой заделки (28), III - граничные условия жесткой заделки (28), IV - при $x = 0; a$, $0 \leq y \leq b$ - граничные условия шарнирного опирания и при $0 \leq x \leq a$, $y = 0; b$ граничные условия свободного края. В последней строке таблицы представлены значения σ^* без ограничений на перемещения, вычисленные теоретически. Влияние односторонних связей на перемещения (неравенства (24)) является существенным и могло быть использовано для повышения несущей способности сжимаемых по кромкам пластин.

Различие в формах равновесия при наличии и отсутствии ограничений на перемещения проиллюстрировано на рис.4.

В разделе 3.5 диссертационной работы рассматривается осесимметричная задачи устойчивости торообразной и сферической оболочки вращения, находящейся под действием внешнего нормального давления. Для вычисления работы внешних сил используется точная термодинамическая формула. Для конечномерной аппроксимации используются кубические сплайны.

Упругая энергия деформированной оболочки вращения, срединную поверхность которой обозначим через S, вычисляется в соответствии с формулой, предложенной А.В. Погореловым в работе "Геометрическая теория устойчивости оболочек

$$U_s = \int\int \Phi_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_1, \kappa_2) ds, \tag{30}$$

где

$$\Phi_1 = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2) +$$
$$+ \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2), \tag{31}$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. В случае осесимметричной деформации

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\varphi'^2 + \psi'^2 - a^2}{a^2}, \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\varphi^2 - (R + a\cos\theta)^2}{(R + a\cos\theta)^2}, \\ \kappa_1 = \dfrac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{a^2\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} - \dfrac{1}{a}, \\ \kappa_2 = \dfrac{\psi'\varphi - \cos\theta(R + a\cos\theta)\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}{\cos^2\theta(R + a\cos\theta)^2\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \end{cases} \tag{32}$$

где

$$\begin{cases} \varphi(\theta) = R + (a + w(\theta))\cos\theta - u(\theta)\sin\theta, \\ \psi(\theta) = (a + w(\theta))\sin\theta - u(\theta)cos\theta. \end{cases} \tag{33}$$

Для внешнего нормального давления в соответствии с теоремой Эйлера–Бернулли работа внешних сил равна

$$A = P\Delta V, \tag{34}$$

где ΔV – изменение объема оболочки в результате деформации.

В положении равновесия полная энергия системы принимает минимальное значение:

$$U_s - A \to \min_{w,u}, \tag{35}$$

где функции w, u удовлетворяют условиям периодичности. Соответствующие перемещения аппроксимированы кубическими сплайнами. Проведены сравнения полученных вычислений с экспериментальными данными.

В **четвертой главе** исследованы нелинейные колебания прямоугольных пластин в рамках теории Кармана.

Уравнения колебаний имеют вид

$$\begin{cases} \frac{D}{h}\Delta\Delta w = -\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \\ \frac{1}{E}\Delta\Delta\varphi = (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \end{cases} \tag{36}$$

где $w = w(x, y, t)$ - прогиб, $\varphi = \varphi(x, y, t)$ – функция напряжений, $D = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, h_0 – толщина пластины, x, y – координаты точек срединной поверхности пластины, t – время,

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \Delta\Delta w = \frac{\partial w^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

– операторы Лапласса и бигармонический оператор.

Пусть $w = w(x, y, t)$ – решение системы уравнений (36). Предполагается, что пластина является прямоугольной, т.е. $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, и свободно оперта по своим краям, точки срединной поверхности свободно перемещаются в координатной плоскости (x, y). Тогда граничные условия можно записать:

$$\begin{cases} w(0,y,t) = w(a,y,t) = 0, & \frac{\partial^2 w(0,y,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(a,y,t)}{\partial x^2} = 0, \\ w(x,0,t) = w(x,b,t) = 0, & \frac{\partial^2 w(x,0,t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w(x,b,t)}{\partial y^2} = 0, \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi(0,y,t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi(a,y,t)}{\partial y^2} = 0, & \frac{\partial^2 \varphi(0,y,t)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(a,y,t)}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi(x,0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x,b,t)}{\partial x^2} = 0, & \frac{\partial^2 \varphi(x,0,t)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(x,b,t)}{\partial x \partial y} = 0. \end{cases} \tag{38}$$

Граничные условия (38) означают отсутствие нормальных и касательных напряжений на краях пластины.

Кроме того должны быть заданы начальные условия

$$w(x,y,0) = u(x,y), \quad \frac{dw(x,y,0)}{dt} = v(x,y). \tag{39}$$

Для конечномерной аппроксимации использовался метод сеток. Полученные в результате численного эксперимента графики решений нелинейной задачи показали, что первоначальные колебания, пройдя ряд последовательных стадий, восстанавливаются в исходном положении.

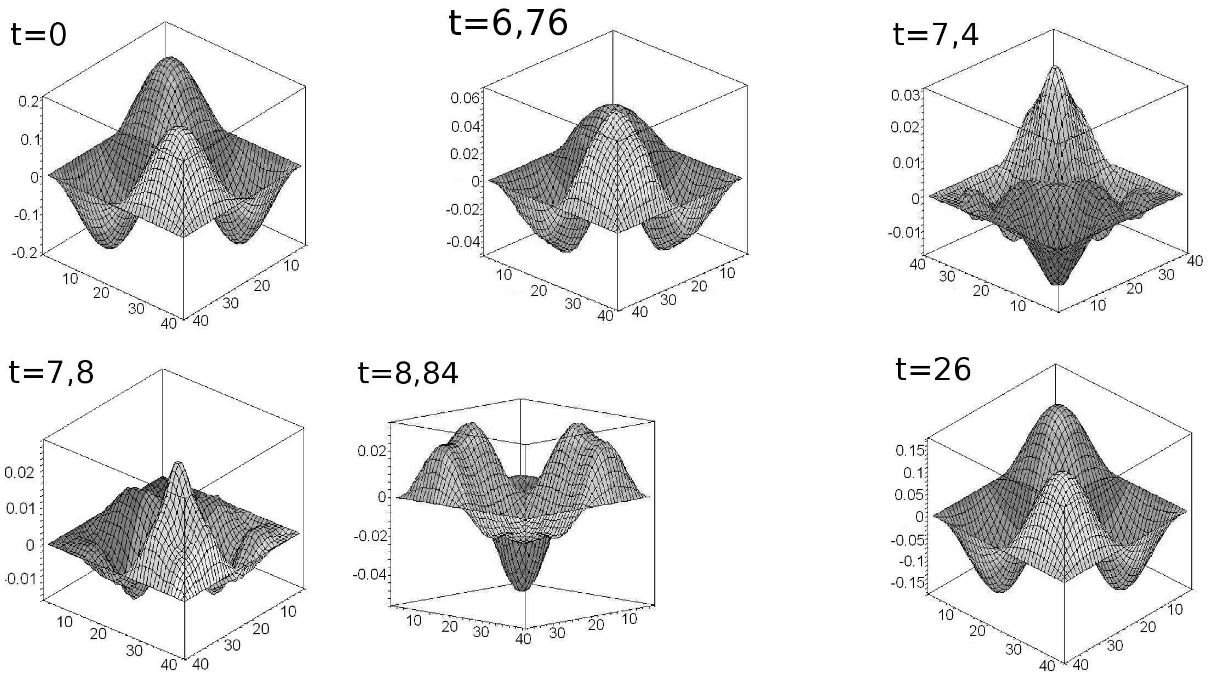

Рис. 5: Нелинейная задача.

Учет нелинейных слагаемых приводит к так называемому «эффекту возврата», который впервые наблюдался в численном эксперименте, проведенном в 1952 году по предложению Ферми, Пасты и Улама.

В заключении представлены основные результаты и выводы диссертации:

• получены аналитические решения задач устойчивости сжимаемого продольной силой стержня, прогиб которого с одной стороны ограничен жестким препятствием, при граничных условиях свободного края;

• решены задачи устойчивости упругих колец, нагруженных нормальными или центральными силами, и подкрепленных упругими нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий;

• численно исследована задача устойчивости прямоугольных пластин при односторонних ограничениях на перемещения с граничными условиями свободного края;

• численно решена задача устойчивости оболочек вращения в осесимметричном случае в наиболее точной нелинейной постановке с вычислением работы внешних сил по точной термодинамической формуле;

• приведены результаты численного анализа нелинейных колебаний прямоугольных пластин в рамках теории Кармана.

Основное содержание диссертации изложено в работах:

1. Андрюкова В.Ю., Тарасов В.Н. Об устойчивости упругих систем с неудерживающими связями. // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2013. №3(15). С. 12-18. (Журнал входит в список ВАК)

2. В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов Аналитическое решение задач устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения. Известия Коми НЦ Уральского отделения РАН. 3(19). 2014. с. 39 — 43. (Журнал входит в список ВАК)

3. Андрюкова В.Ю. Некоторые задачи устойчивости упругих систем с односторонними ограничениями на перемещения.// "Вычислительная механика сплошных сред". Пермь. 2014. Том 7, №4. С.412 — 422. (Журнал входит в список ВАК)

4. Veronika Andryukova, Vladimir Tarasov Nonsmooth problem of stability for elastic rings. Труды международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В.Ф. Демьянова. Часть I. - СПб.: Издательство ВВМ, 2017. 268 с.; DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973928. (Публикация входит в систему Scopus.)

5. В.Ю. Михайлюк Об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием внешнего нормального давления. Тезисы четырнадцатой Коми республиканской молодежной научной конференции. Российская академия наук Уральское отделение Коми научный центр. Сыктывкар. 2000.

6. В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов. Некоторы задачи устойчивости упругих систем. // Вестник Сыктывкарского университета. Сер.1. Вып.5.2003. Стр.21- 34.

7. В.Ю. Андрюкова К вопросу устойчивости кривых постоянной ширины.// Сборник трудов Сыктывкарского лесного института. 2006. Стр.5 - 11.

8. В.Н. Тарасов, В.Ю. Андрюкова Об устойчивости цилиндрической оболочки при наличии односторонних ограничений на перемещения. Сборник статей Международной конференции «XVIII сессия Международной Школы по моделям механики сплошной среды» г. Саратов. Издательство Саратовского университета. 2007. Стр. 273 – 276.

9. В.Н. Тарасов, В.Ю. Андрюкова Об устойчивости и закритическом поведении сферической оболочки. Вестник Сыктывкарского университета. Сер.1.Вып.8.2008. Стр.133 - 140.

10. В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов. Уточненный метод расчета устойчивости оболочек вращения. Межрегиональный совет по науке и технологиям. г. Миасс. Краткие сообщения XXVIII Российской школы. 2008. Стр. 54 – 57.

11. Андрюкова В.Ю. Об устойчивости и закритическом поведении сферической оболочки. Материалы докладов I Всероссийской молодежной научной конференции «Молодежь и наука на Севере». Российская академия наук, Уральское отделение, Коми научный центр. Том I. Сыктывкар. 2008. Стр. 3 – 4.

12. В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов. К задаче о нелинейных колебаниях прямоугольных пластин. Математическое моделирование и краевые задачи. Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Самара, 2010. с.368 - 370.

13. В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов. О нелинейных колебаниях прямоугольных пластин. Вестник Сыктывкарского университета. Выпуск 11. 2010 г. с. 76 — 86.

14. В.Н. Тарасов, В.Ю. Андрюкова Об устойчивости тороидальной оболочки с односторонним подкреплением. Вестник Сыктывкарского университета. Выпуск 15. 2012 г. с. 63 — 72.

15. В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов Об устойчивости стержня при односторонних ограничениениях на перемещения. // Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Инф. 2013. Вып. 17. С. 3–16.

16. В.Н. Тарасов, В.Ю. Андрюкова Об устойчивости колец при односторонних ограничениениях на перемещения. Вестник Сыктывкарского университета. Выпуск 18. 2013 г. С. 68 - 78 .

17. В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов Новые задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения. Математическая физика и ее приложения. IV Международная конференция. Самара. 2014. С. 54-55.

18. В.Н. Тарасов, В.Ю. Андрюкова Об устойчивости кругового кольца, сжимаемого равномерно распределенными центральными силами, при наличии односторонних ограничений на перемещения. Труды Коми научного центра УрО Российской АН, № 187. Сыктывкар. 2014. с. 79 — 93.

19. Андрюкова В.Ю. Некоторые конструктивно—нелинейные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения. // XIX Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь. 2015 г. Тезисы докладов. С.24. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. - 362 с. ISBN 978-5-7691-2475-4.

20. Андрюкова В.Ю. Задачи устойчивости колец с односторонними ограничениями на перемещения.// Тезисы международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль. 2015. С.23.

21. Андрюкова В.Ю., Тарасов В.Н. Уточненный метод расчета устойчивости оболочек вращения в осесимметричном случае. // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2016. №1(25). С. 5-10.

22. Андрюкова В.Ю. Задачи устойчивости упругих систем с неудерживающими связями.// Механика и математическое моделирование в технике. Сборник тезисов Всероссийской научно-технической конференции. Москва. 2016. с.23 – 27.

23. Андрюкова В.Ю. Об устойчивости торообразных оболочек.// XX Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь. 2017 г. Тезисы докладов. С.24. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2017. - 390 с. ISBN 978-5-7691-2475-4.

24. Андрюкова В.Ю., Тарасов В.Н. Негладкие задачи устойчивости упругих колец. // Тезисы докладов международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В.Ф. Демьянова. Часть I. - СПб.: Издательство ВВМ, 2017. с. 213 - 218. ISBN 978-5-9651-1058-2.

25. Андрюкова В.Ю. Нелинейные колебания прямоугольных пластин. Тезисы докладов. Международный семинар «Теоретико-групповые методы исследования физических систем». 21-23 сентября 2017. Физико-математический институт Коми НЦ Уро РАН. Сыктывкар. с. 10. ISBN 978-5-89606-567-8.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доценту Владимиру Николаевичу Тарасову за постановку задач и постоянное внимание, а также своим коллегам, за поддержку во время написания диссертации.

Тираж 100 экз.

Издательство Коми научного центра УрО РАН
167982, г. Сыктывкар, ул. Первомайская, 48.