На правах рукописи

Гусев Василий Васильевич

Теоретико-игровые модели поиска и патрулирования на графах

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Петрозаводск – 2017

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук

Научный руководитель:	**Мазалов Владимир Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Чхартишвили Александр Гедеванович,** доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории активных систем ФГБУН Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
	Зенкевич Николай Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры операционного менеджмента ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
Ведущая организация:	ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»

Защита состоится «22» декабря 2017 года в 16:30 на заседании диссертационного совета Д 212.190.03 при ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет», по адресу: 185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Петрозаводского государственного университета и на сайте petrsu.ru.

Автореферат разослан «____»____________ 2017 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь диссертационного совета — Воронов Роман Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Игры поиска представляют собой прикладное направление теории игр. Такие игры возникают в военных приложениях, задачах распределения ресурсов, охраны объектов и др. Им посвящено большое количество работ. Такие игры рассматриваются как в статической (задача с неподвижным прячущимся), так и в динамической (задача с подвижным прячущимся) постановках. Классической задачей теории поиска является задача, в которой один участник прячет объект, а другой распределяет ресурсы так, чтобы его обнаружить. Ищущий заинтересован в минимизации времени обнаружения объекта, а прячущий старается это время максимизировать. Поэтому задачу поиска можно изучать как игру с нулевой суммой, в которой под значением игры понимается вероятность, с которой ищущий найдет спрятанный объект. Значительно меньше число работ посвящено задачам патрулирования, которые актуальны при охране ценных коллекций музеев, художественных галерей, банков и других объектов. Владельцы недвижимого имущества заинтересованы в том, чтобы маршруты охранников были оптимальны. Под охранником понимается ищущий игрок или патрулирующий, а прячущий выступает в роли атакующего, который пытается причинить ущерб охраняемому объекту. В зависимости от действий и возможностей игроков можно получать различные вариации игры и отвечать на следующие вопросы:

1. При каком минимальном количестве патрулирующих выигрыш в игре максимален?

2. Как изменятся маршруты патрулирующих, если на местности будут установлены камеры слежения, добавлены новые маршруты, расширены или уменьшены допустимые стратегии игроков (т. е. появление в игре дополнительных параметров)?

3. Как изменится выигрыш патрулирующего, если атакующий перестанет быть пассивным и окажет сопротивление?

В некоторых случаях предполагается, что на охраняемой местности установлена камера слежения, т.е. как только атакующий появится на объекте, об этом сразу же узнает патрулирующий и направляется к месту атаки. Отметим, что термины "прячущийся объект"и "подвижный игрок"яляются синонимами.

Если патрулирующих игроков несколько, то стоит поднять вопрос о справедливом дележе выигрыша (заработной платы). Распределение выигрыша между игроками в кооперативной игре является важной задачей теории игр. Популярными способами дележа являются C-, N-, K-ядро, вектор Шепли. Иногда участники игры могут образовывать коалиционные структуры, тогда выигрыш каждого игрока можно вычислить, например, используя вектор Оуэна или Ауманна-Дрезе. Каждый способ распределения выигрыша обладает своими достоинствами и недостатками, следовательно, выбранный способ дележа необходимо четко аргументировать. Традиционно игры патрулирования исследуются как некооперативные игры. В данной работе так же рассматривается игра патрулирования с коалиционной структурой.

Целью диссертационной работы является разработка методов и алгоритмов для построения решений в теоретико-игровых моделях поиска и патрулирования.

Поставленные задачи. 1. Нахождение оптимальных маршрутов патрулирования для графов различной топологии и нахождение значения игры. 2. Оптимизация распределения выигрыша между патрулирующими на основе методов кооперативной теории игр. 3. Нахождение оптимального распределения поисковых ресурсов в динамической модели поиска нескольких объектов.

Научная новизна работы. Все основные результаты, сформулированные в тексте диссертации, являются новыми. Найдено значение игры патрулирования для разных видов графов. Сложность нахождения равновесия в рассматриваемой игре заключается в том что число маршрутов патрулирующего при большом количестве вершин графа велико. В настоящей работе проводится сравнение выигрыша патрулирующего в игре без установленных камер слежения с выигрышем патрулирующего в игре, когда камеры установлены. Получены новые результаты для графа, который является моделью жилого дома.

Впервые изучены значения вектора Оуэна в кооперативной игре патрулирования с коалиционной структурой. Проведено сравнение значений вектора

Оуэна со значениями вектора Ауманна-Дрезе.

Усовершенствована многошаговая модель поиска подвижного игрока. Новым предположением в модели является то, что прячущихся игроков двое, из-за чего функции выигрышей игроков имеют другой вид. Так же предложено распределение бюджета по группам вершин, имеющих общего родителя. В такой модели получены новые результаты, связанные с распределением бюджета, поведением подвижных игроков.

Теоретическая и практическая значимость. Найденные значения игры патрулирования и оптимальные стратегии охранников могут быть использованы при выборе места, где будет размещен тот или иной ценный предмет. Дана прикладная интерпретация значениям вектора Оуэна, которые могут быть использованы при распределении заработной платы, если с игроками заключен трудовой договор найма. Из решения многошаговой игры поиска можно оценивать какая из вершин графа более или менее предпочтительна для подвижных игроков и какую долю бюджета стоит туда направить для эффективного поиска.

Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017614131 "Программа для поиска оптимальных путей в задаче патрулирования".

Положения, выносимые на защиту.

1. Разработаны методы нахождения оптимальных стратегий в модели поиска неподвижного объекта для графов различной топологии, в частности, для ориентированных графов.

2. Предложено для распределения выигрыша в задаче поиска вторжения использовать вектор Оуэна и Ауманна-Дрезе.

3. Предложена и исследована многошаговая модель поиска двух подвижных объектов с фиксированным бюджетом искателя на каждом шаге.

4. Реализован алгоритм сокращения маршрутов и атак игроков в виде комплекса программ для нахождения равновесных стратегий патрулирующего и атакующего.

Методы исследования включают: методы динамического программирования, линейное и нелинейное программирование, теория графов, методы математической теории игр, дискретный анализ.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы были представлены и обсуждались на научных конференциях: 1. NGM-2015, International Workshop Networking Games and Management, Petrozavodsk-2015, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Centre of RAS (2015), г. Петрозаводск. 2. Международная научная конференцией «Теория игр и менеджмент – 2015» (GTM-2015), г. Санкт-Петербург. 3. NGM-2016, International Workshop Networking Games and Management, Petrozavodsk-2016, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Centre of RAS (2016), г. Петрозаводск. 4. Международная научная конференцией «Теория игр и менеджмент – 2016» (GTM-2016), г. Санкт-Петербург. GTM 2016. 5. VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM 2016). Moscow, October 2016.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ, из них 4 статьи в рецензируемых журналах из списка ВАК РФ и 5 работ опубликовано в материалах тезисов докладов.

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты получены автором лично.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, разбитых на подразделы, списка литературы и приложения. Текст содержит 13 рисунков и 21 таблицу. Общий объем диссертации составляет 139 страниц. Библиографический список включает 75 наименований.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, формулируется цель работы, дается обзор научной литературы по изучаемой проблеме, приводится краткое содержание по главам.

В первой главе рассматривается теоретико-игровая модель патрулирования на графе, в которой атакующий имеет m единиц времени для атаки некоторой вершины графа, а стратегией патрулирующего является выбор маршрута в графе. Найдены равновесие в игре с нулевой суммой и средняя длина патрулирования для различных графов.

Рассмотрим игру патрулирования $G =< P, A; Q; S_1, S_2; H >$, в которой P – патрулирующий; A – атакующий; $Q =< V, E >$ – неориентированный граф, где V – множество вершин, E – множество ребер, $n = |V|$ - количество вершин в графе. Вершины графа Q будем обозначать $v_j, j = 1, ..., n$, запись $v_j = 0$ означает, что v_j не является вершиной. Две разные вершины графа могут соединяться только одним ребром, может существовать ребро вида (v_k, v_k). Заметим, что граф Q может быть несвязным.

Множество стратегий патрулирующего S_1 представляет маршруты патрулирования $u = v_{k_1} - v_{k_2} - ... - v_{k_T}$, где $\forall j = 1, ..., T : v_{k_j} \in V, 1 \leq k_j \leq n, T \geq 1; \forall t = 1, ..., T - 1 : (v_{k_t}, v_{k_{t+1}}) \in E$. Элементы множества S_2 (стратегии атакующего), которые будем называть атаками, представим в виде $\underbrace{0 - ... - 0}_{t-1} - \underbrace{v - ... - v}_{m} - 0 - ... - 0 \; t = 1, ..., T - m + 1$, или более кратко $w = (t, v)$, где t момент посещения вершины v.

Функцией выигрыша $H(u, w), u \in S_1, w \in S_2$, является вероятность поимки атакующего игрока патрулирующим игроком:

$$H(u, w) = \begin{cases} 0, \forall j = 1, ..., m : v_{k_{t+j}} \neq v; \\ 1, \exists j = 1, ..., m : v_{k_{t+j}} = v. \end{cases}$$

Если $H(u, w) = 1$, то будем говорить, что маршрут u ловит атаку w.

Игру $G =< P, A; Q; S_1, S_2; H >$ для краткости запишем как $G\,(Q, T, m)$, где m – время, которое необходимо атакующему для проведения атаки; T – длина маршрута $(m \leq T)$. Нас будут интересовать в данной игре ситуация равновесия и значение игры.

Лемма 1.1.1. Пусть патрулирующий выбирает путь $u \in S_1$. Тогда патрулирулирующий ловит не более $m\,(T - m + 1)$ атак атакующего.

Теорема 1.3.1. Обозначим $\sigma_k = (k+1, k+2, ..., n, 1, 2, ..., k), k = 0, ..., n-1$ – перестановку чисел $1, 2, 3, \ldots, n$; $\sigma_k(j)$ – j-й элемент набора σ_k. Введем $\sigma_{k'}$, где $k' > n-1$, $\sigma_{k'}(j) = \sigma_{k' \bmod n}(j)$. Если патрулирующий выбирает маршруты из множества

$$\overline{S_1} = \left\{ v_{\sigma_0(j)} - v_{\sigma_1(j)} - v_{\sigma_2(j)} - ... - v_{\sigma_{T-1}(j)} | j = 1, ..., n \right\},$$

с вероятностью $\frac{1}{n}$, а атакующий – все стратегии из S_2 с вероятностью $\frac{1}{n(T-m+1)}$, то такой набор стратегий будет ситуацией равновесия со значением игры $H^* = \min\{\frac{m}{n}, 1\}$.

Теорема 1.4.1. Пусть $T \geq m+1$; $\sigma_0 = (1, 2, 1, 3, ..., 1, n)$ - упорядоченный набор чисел $2, 3, ..., n$ и единиц. Пусть σ_k при $0 < k \leq 2(n-1)-1$ получается из σ_0 путем перемещения последних k чисел с конца в начало. Если $k > 2(n-1)-1$, то $\sigma_k = \sigma_{k \bmod 2(n-1)}$. Если патрулирующий выбирает маршруты из множества

$$\overline{S_1} = \left\{v_{\sigma_0(j)} - v_{\sigma_1(j)} - v_{\sigma_2(j)} - ... - v_{\sigma_{T-1}(j)} | j = 1, ..., 2(n-1)\right\},$$

с вероятностью $\frac{1}{2(n-1)}$, а атакующий – атаки из множества

$$\overline{S_2} = \left\{\underbrace{v_k - ... - v_k}_{m} - 0 - ... - 0, 0 - \underbrace{v_k - ... - v_k}_{m} - 0... - 0 | k = 2, ..., n\right\},$$

с вероятностью $\frac{1}{2(n-1)}$, то такой набор стратегий будет ситуацией равновесия со значением игры $H^* = \min\{\frac{m}{2(n-1)}, 1\}$.

Рассмотрим линейный граф L_n, состоящий из n вершин. Уже для линейного графа оптимальные пути и атаки не элементарны и не всегда удается записать значение игры в виде формулы. В данном разделе найдены значения игры для некоторых частных случаев в зависимости от параметров T, m, n.

Теорема 1.5.3. Если $T + n \leq 2m$, то $H^* = 1$.

Теорема 1.5.5. Пусть $m = n, T < m + n - 2$. Если патрулирующий выбирает маршруты из множества $\overline{S_1} = \{u_1, u_2, ..., u_{T-m+1}, u_n, u_{n+1}, ..., u_{n+T-m}\}$ с вероятностью $\frac{1}{2(T-m+1)}$, а атакующий – атаки из множества

$$\overline{S_2} = \{\underbrace{1 - ... - 1}_{m} - 0 - ... - 0, ..., 0 - ... - 0 - \underbrace{1 - ... - 1}_{m},$$

$$\underbrace{n - ... - n}_{m} - 0 - ... - 0, ..., 0 - ... - 0 - \underbrace{n - ... - n}_{m}\}$$

с вероятностью $\frac{1}{2(T-m+1)}$, то выбранные стратегии являются ситуацией равновесия со значением игры $H^* = \frac{T-m+2}{2(T-m+1)}$.

Длина маршрута патрулирующего определяется моментом поимки атакующего, либо равна T, если поимки не произошло. Среднюю длину маршрута будем обозначать μ.

$$\mu = \sum_{i=1}^{|S_1|} \sum_{j=1}^{|S_2|} \tilde{T}_{ij} x_i y_j,$$

где $|S_1|, |S_2|$ – количество маршрутов и атак в ситуации равновесия для игры $G(Q, T, m)$ соответственно ; $\tilde{T}$ – сумма длин ребер, по которым прошел патрулирующий до встречи с атакующим, $0 \leq \tilde{T} \leq T - 1$; x_i– вероятность выбора i-го маршрута; y_j – вероятность выбора j-й атаки.

Теорема 1.7.1. Пусть в ситуации равновесия в игре $G(Q, T, m)$ атакующий выбирает всевозможные атаки, а в оптимальных маршрутах патрулирующего в каждый момент времени t каждая вершина встречается один раз. В таком случае $\mu = (T - 1)\left(1 - \frac{V}{2}\right)$.

Теорема 1.9.1. Пусть в каждой вершине связного неориентированного графа Q установлена камера слежения. Тогда значение игры $G(Q, T, m)$ равно $\frac{1}{r}$, где r - число графов покрытия Q.

Покроем граф Q, используя следующий алгоритм:

Шаг 1. Находим в графе концевой узел, который имеет наибольший уровень в графе Q. Обозначим эту вершину v^a, а уровень вершины v_a как U^a.

Шаг 2. Для вершины v^a определяем местоположение вершины v^b, такой, что маршрут $u(v^b, v^a)$ существует и уровень вершины v^b равен $U^a - m$ (если $U^a - m < 0$, то v^b - корень дерева Q). Обозначим $Q(v^b)$ дерево с корнем v^b.

Шаг 3. Вычитаем из Q граф $Q(v^b)$ и получаем Q', т.е. $Q' = Q \setminus Q(v^b)$.

Шаг 4. Продолжаем выполнять шаги 1-3 до тех пор, пока вершина v^b не совпадет с корнем графа Q'.

Теорема 1.10.1. Значение игры $G(Q, T, m)$ равно $\frac{1}{r}$, где r - число графов покрытия графа Q.

Пусть B_n - ориентированный граф из n вершин, в котором каждая вершина является либо начальной вершиной, либо конечной. Обозначим N - множество начальных вершин, K - множество конечных вершин. $|N|, |K|$ - количество начальных и конечных вершин, соответственно.

Теорема 1.8.1. Значение игры $G(B_n, T, m)$ равно

$$H = \begin{cases} \frac{1}{n}, T \geq 2m-1; \\ \frac{1}{r}, T < 2m-1, \end{cases}$$

где r – минимальное число подграфов покрытия из двух вершин графа B_n.

Во второй главе исследуется модель кооперативной игры патрулирования с коалиционной структурой. Показано, что векторы Шепли, Оуэна и Ауманна-Дрезе в рассматриваемой игре совпадают друг с другом при нечетном количестве патрулирующих.

Введем характеристическую функцию игры. Зададим ее следующим образом:

$$v(K) = \begin{cases} \frac{1}{m}\left(1 + \left[\frac{|K|-1}{2}\right]\right), P_1 \in K; \\ \frac{1}{m}\left[\frac{|K|}{2}\right], P_1 \notin K. \end{cases},$$

где $|K|$ — количество патрулирующих в коалиции $K \in N$. Значение характеристической функции $v(K)$ равно вероятности поимки атакующего коалицией K.

Теорема 2.7.1. Вектор Шепли в игре $\Gamma(\cdot)$ вычисляется по формуле

$$\phi_i(v) = \begin{cases} \frac{1}{m}, i = 1; \\ \frac{1}{2m}, i \neq 1, N - \text{нечетно}; \\ \frac{N-2}{2m(N-1)}, i \neq 1, N - \text{четно}. \end{cases}$$

Теорема 2.7.2. Значения Ауманна-Дрезе в игре $\Gamma(\cdot)$ вычисляется по формуле

$$\phi_i^{\pi_e} = \begin{cases} \frac{1}{m}, i = 1; \\ \frac{1}{2m}, |B(i)| = 2; \\ 0, |B(i)| = 1, i \neq 1. \end{cases}$$

Вектор Оуэна, вычисленный для эффективной коалиционной структуры, совпадает с вектором Ауманна-Дрезе.

В третьей главе построена многошаговая модель поиска двух подвижных обектов. Пусть $G = \langle V, E \rangle$ – ориентированное дерево без петель с фикси-

рованным корнем, где V – множество вершин, E – множество ребер. Все вершины графа перенумерованы, нулем обозначим корень дерева. $E = \{(i,j)\}, i,j \in V$, где $(i,j) \in E$, – ориентированное ребро графа G.Если $(i,j) \in E$, то вершину j будем называть потомком вершины i.
Обозначим $L = \{i | \exists j \in V : (j,i) \in E; \forall l \in V : (i,l) \notin E\}$ – множество листовых вершин G; $\forall j \in V \setminus L$ определим $ch(j) = \{i | (j,i) \in E\}$ – множество потомков вершины j. Предполагаем, что на множество E есть два ограничения: 1. $\forall j \in V, j \neq 0 \exists! i \in V : (i,j) \in E$; 2. $(i,i) \notin E$.

Пусть на шаге 1 (последний шаг) первый подвижный объект находится в вершине g, второй в вершине l, $g, l \in v(n-1), g \neq l$. Определим игру

$$\Gamma(1, g, l, \Phi_g, \Phi_l) = \langle I, II, III; P(g), Q(l), \Psi(g) \cup \Psi(l); H_1(\cdot), H_2(\cdot), H_3(\cdot) \rangle,$$

где I, II, III – игроки, $P(g), Q(l), \Psi(g) \cup \Psi(l)$ – множества стратегий игроков

Определим функции выигрышей игроков на шаге 1.

$$H_1(1, p(g), \varphi(g)) = \sum_{i \in ch(g)} p_i (1 - e^{-\alpha_i \varphi_i})$$

$$H_2(1, q(l), \varphi(l)) = \sum_{j \in ch(l)} q_j (1 - e^{-\alpha_j \varphi_j})$$

$$H_3(1, p(g), q(l), \varphi(g), \varphi(l)) = \sum_{i \in ch(g)} \sum_{j \in ch(l)} p_i q_j (1 - e^{-\alpha_i \varphi_i - \alpha_j \varphi_j}),$$

$$p(g) \in P(g), q(l) \in Q(l), \varphi(g) \in \Psi(g), \varphi(l) \in \Psi(l) \tag{1}$$

$$\forall i \in ch(g), \forall j \in ch(l) : p_i \geq 0, q_j \geq 0, \varphi_i \geq 0, \varphi_j \geq 0; \tag{2}$$

$$\sum_{i \in ch(g)} p_i = 1, \sum_{j \in ch(l)} q_j = 1, \sum_{i \in ch(g)} c_i \varphi_i = \Phi_g, \sum_{j \in ch(l)} c_j \varphi_j = \Phi_l. \tag{3}$$

Теперь определим игры $\Gamma_2(k, g, l, \Phi_g, \Phi_l), \Gamma_1(k, g, \Phi_g)$ на шагах $2, 3, ..., n$. Пусть на шаге $k = 2, 3, ..., n$ первый и второй подвижные объекты находятся в вершинах $g, l, \in v(n-k-1)$ соответстенно.

$$\Gamma(k, g, l, \Phi_g, \Phi_l) = \langle I, II, III; P(g), Q(l), \Psi(g) \cup \Psi(l); H_1(\cdot), H_2(\cdot), H_3(\cdot) \rangle,$$

где функции выигрышей игроков имеют вид

$$H_1(k, p(g), \varphi(g)) = \sum_{i \in ch(g)} p_i (1 - e^{-\alpha_i \varphi_i}) + \sum_{i \in ch(g)} p_i e^{-\alpha_i \varphi_i} H_1^*(k-1, i, \Phi_i),$$

$$H_2(k, q(l), \varphi(l)) = \sum_{j \in ch(l)} q_j(1 - e^{-\alpha_j \varphi_j}) + \sum_{j \in ch(l)} q_j e^{-\alpha_j \varphi_j} H_2^*(k-1, j, \Phi_j),$$

$$H_3(k, p(g), q(l), \varphi(g), \varphi(l)) = \sum_{i \in ch(g)} \sum_{j \in ch(l)} p_i q_j (1 - e^{-\alpha_i \varphi_i - \alpha_j \varphi_j}) +$$

$$\sum_{i \in ch(g)} \sum_{j \in ch(j)} p_i q_j e^{-\alpha_i \varphi_i - \alpha_j \varphi_j} H_3^*(k-1, i, j, \Phi_i, \Phi_j).$$

Лемма 3.4.1. В играх $\Gamma_1(k, g, \Phi_g)$ и $\Gamma_2(k, g, l, \Phi_g, \Phi_l)$ существует равновесие по Нэшу.

Теорема 3.5.1. В игре $\Gamma_2(1, g, l, \Phi_g, \Phi_l)$ верны следующие равенства $H_1^*(1, g, \Phi_g) = 1 - exp\left(\frac{-\Phi_g}{\sum_{i \in ch(g)} \frac{c_i}{\alpha_i}}\right), H_2^*(1, l, \Phi_l) = 1 - exp\left(\frac{-\Phi_l}{\sum_{j \in ch(l)} \frac{c_j}{\alpha_j}}\right),$
$H_3^*(1, g, l, \Phi_j, \Phi_l) = 1 - exp\left(-\frac{\Phi_g}{\sum_{i \in ch(g)} \frac{c_i}{\alpha_i}} - \frac{\Phi_l}{\sum_{j \in ch(l)} \frac{c_j}{\alpha_j}}\right)$

Теорема 3.8.1. Пусть оба подвижных объекта находятся в вершине g на шаге n. Тогда оптимальные стратегии игроков имеют вид

$$\varphi_i^* = \left[\frac{\Phi_g/\alpha_i}{\sum_{j \in M(j)} \frac{c_j}{\alpha_j}} - \frac{1}{\alpha_i} \frac{\sum_{j \in M(g)} \frac{c_j}{\alpha_j} ln\beta_j}{\sum_{j \in M(g)} \frac{c_j}{\alpha_j}} + \frac{ln\beta_i}{\alpha_i}\right]^+,$$

$$p_i^* = \begin{cases} \frac{c_i/\alpha_i}{\sum_{j \in M(g)} c_j/\alpha_j}, i \in M(g); \\ 0, i \notin M(g). \end{cases}$$

В большинстве работ вероятность обнаружения объекта равна $1 - e^{-\alpha_i \varphi_i}$. Если устремить число ресурсов в бесконечность, то такая вероятность обнаружения будет быстро стремиться к единице. Однако, на практике, при большом количестве ресурсов методы и алгоритмы обнаружения подвижного объекта могут быть не так просты, т. е. вместо экспоненциальной вероятности обнаружения следует рассмотреть другие функции, которые задают вероятность поимки объекта.

Теорема 3.9.1. Пусть $f(x)$ дифференцируема на $[0; +\infty)$, выпукла низ, строгоубывающая функция. Тогда в игре с нулевой суммой $\Gamma = \langle I, II; P, \Psi; H(P, \Psi)\rangle$ значение игры и ситуация равновесия имеют вид

$$H^*(P^*, \Psi^*) = f\left(\frac{\Phi}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\alpha_i}}\right), p_i^* = \frac{c_i/\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\alpha_i}}, \varphi_i^* = \frac{\Phi/\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\alpha_i}}$$

В конце третьей главы приводится описание программного комплекса, разработанного для решения задач патрулирования.

Для решения задачи поиска неподвижного объекта создан программный продукт «Программа для поиска оптимальных путей в задаче патрулирования» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017614131, см. приложение А). Тип ЭВМ: персональный компьютер. Язык: Object Pascal (Delphi XE2). ОС: MS Windows. Объём программы: 112 Кб.

Назначение программного комплекса — получение решения игры патрулирования.

Основные функции: 1. Составление платежной матрицы игры; 2. Сокращение стратегий игроков; 3. Нахождение оптимальных вероятностей выбора путей и атак патрулирующим и атакующим игроками соответственно.

Схема работы приложения с момента ввода данных до поиска решения изображена на рис. 3.10.1

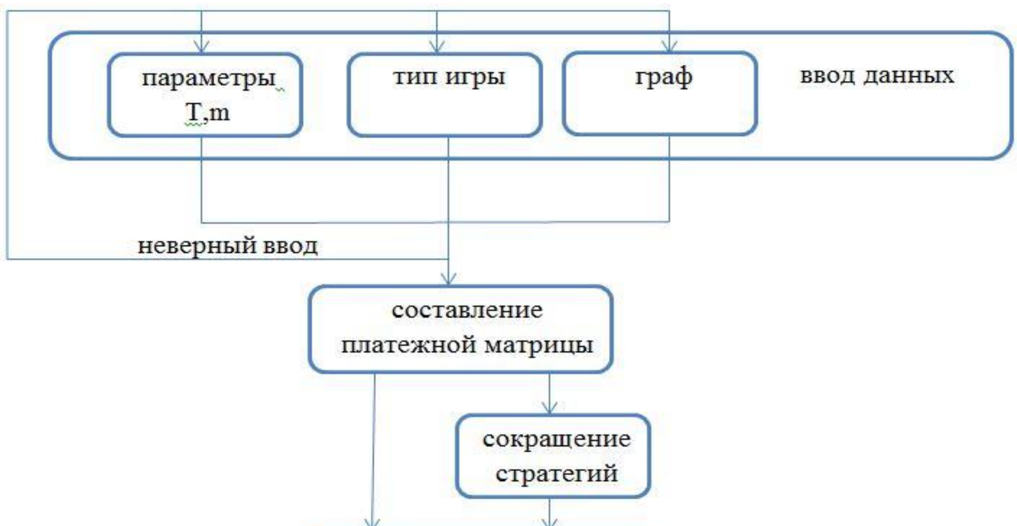


Рис 3.10.1. Схема работы приложения

Отметим необходимость в создании приложения. Если граф состоит из большого количества вершин, то количество путей в графе может быть значительно велико. Платежная матрица будет иметь высокую размерность, что затрудняет решение задачи. В программе реализован алгоритм сокращения стратегий на основе результатов Альперна.

Работа с приложением. Основное окно программы имеет вид (рис. 3.10.2).

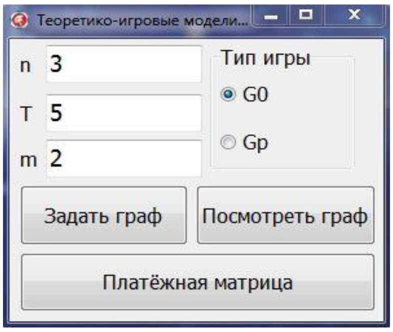
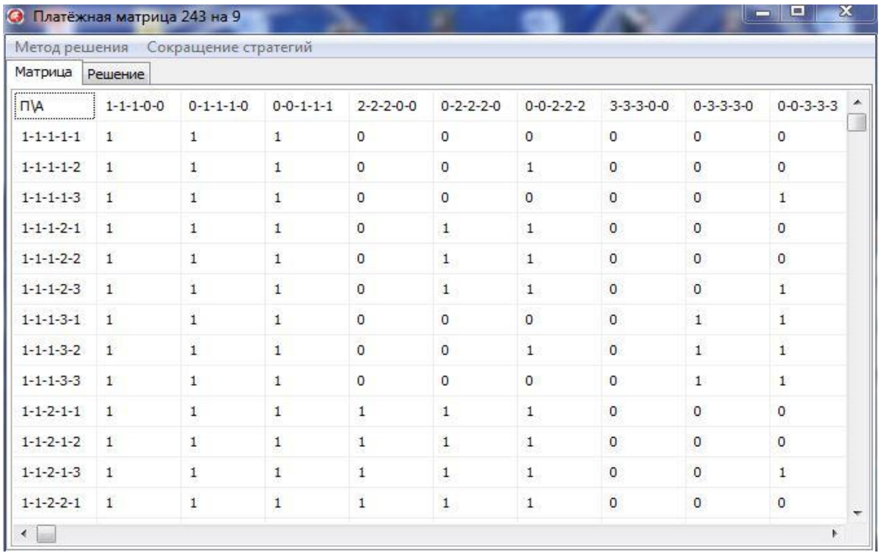


Рис 3.10.2 Окно программы

В окне можно ввести значения параметров, выбрать тип игры (G_0 – непериодическая игра, в которой патрулирующий необязательно возвращается в вершину из которой он начал движение. G_p – периодическая игра, патрулирующий обязательно возвращается в вершину из которой он начал движение). Так же можно задать матрицу инцидентности графа и посмотреть ее, нажав на соответствующие кнопки. После ввода необходимой информации при нажатии на кнопку «Платёжная матрица» появляется окно на рис 3.10.3.



П\А	1-1-1-0-0	0-1-1-1-0	0-0-1-1-1	2-2-2-0-0	0-2-2-2-0	0-0-2-2-2	3-3-3-0-0	0-3-3-3-0	0-0-3-3-3
1-1-1-1-1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1-1-1-1-2	1	1	1	0	0	1	0	0	0
1-1-1-1-3	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1-1-1-2-1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1-1-1-2-2	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1-1-1-2-3	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1-1-1-3-1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1-1-1-3-2	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1-1-1-3-3	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1-1-2-1-1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
1-1-2-1-2	1	1	1	1	1	1	0	0	0
1-1-2-1-3	1	1	1	1	1	1	0	0	1
1-1-2-2-1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

Рис 3.10.3 Платежная матрица

В данном окне можно посмотреть платежную матрицу, размерность которой указывается в заголовке окна. Пример выходных данных изображен на рис. 3.10.4.

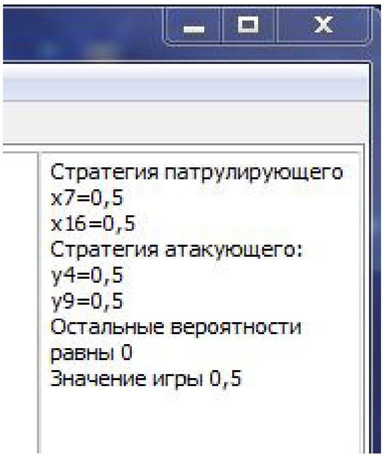


Рис 3.10.4. Пример выходных данных

Заключение

Большая часть работы посвящена нахождению ситуации равновесия в играх поиска и патрулирования. При поиске неподвижного объекта на графе рассмотрены основные виды графов: цикл, звезда и линейный граф и другие. Сложность нахождения равновесия в рассматриваемой игре заключается в том, что для разных видов графов получаются разные решения, которые не всегда удается записать аналитически в общем виде. Число путей патрулирующего при большом количестве вершин графа велико, что так же затрудняет нахождение оптимальных стратегий игроков. Однако, используя доказанные в диссертации утверждения, можно оценивать вероятность поимки атакующего, что может быть полезно в практических задачах. Допущение предположения о камере слежения существенно меняет решение задачи. Граф разбивается на подграфы, патрулирующий не начинает движения до тех пор, пока не начнётся атака атакующего. Полученные результаты могут применяться на практике для анализа полезности камер слежения.

Предложенные способы дележа, основанные на принципах кооперативной теории игр, могут быть использованы в ситуациях при оплате труда работников. При этом, наиболее удобным для определения выплат является вектор Оуэна. Во многих работах векторы Шепли, Оуэна и Ауманна-Дреза отличны друг от друга. Однако, для рассматриваемой игры патрулирования показано, что такие способы дележа совпадают при нечетном количестве патрулирующих, среди которых один сильный игрок. Показано, что вектор Оуэна учитывает конкуренцию среди патрулирующих.

При рассмотрении многошаговой игры поиска двух подвижных объектов можно сделать вывод, что искателю не нужно знать сколько прячущихся игроков находится в той или иной вершине графа. Так же заметим, что оптимальные стратегии подвижных игроков не зависят от бюджета искателя, что является немаловажным результатом для прикладных задач.

Публикации по теме диссертации

1. В. В. Гусев, В. В. Мазалов, "Оптимальные стратегии в игре патрулирования на графе", Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр., 2015, № 2, 61–76.

2. В. В. Гусев Ситуация равновесия в игре патрулирования с камерой слежения // Труды Карельского научного центра РАН, № 10. 2015. С. 28-33. DOI: 10.17076/mat145

3. В. В. Гусев Поиск оптимального начального распределения местоположения игроков в игре патрулирования //Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2015, т. 25, вып. 4, с. 453-458 DOI: 10.20537/vm150402

4. Василий В. Гусев, "Векторы Шепли, Оуэна и Ауманна–Дрезе в игре патрулирования с коалиционной структурой", МТИП, 8:4 (2016), 30–42

5. B. Gusev, V. Mazalov Optimal strategies in the patrol game on a graph// SING-GTM2015 European Meeting on Game Theory Abstracts. 2015. pp 52-53

6. V. V. Gusev, V. V. Mazalov Optimal Strategies in the Patrol Game on a Graph// NGM, Сборник расширенных тезисов. 2015. p. 12

7. V. Gusev Shaply Value, Owen and Aumann-Dreze vectors in Patrolling Game With Coalitional Structure// Game theory and Management. Collecked abstract. 2016. P. 60

8. В. В. Гусев Векторы Шепли, Оуэна и Ауманна–Дрезе в игре патрулирования с коалиционной структурой // ORM VIII Московская международная конференция по исследованию операций. Том 2. 2016. pp 178-179

9. V. Gusev Game-Theoretic model of detection of submarines // NGM International

Workshop Networking Games and Management. 2016. pp. 18-19